Промежуточные трехзначные регулярные логики Клини

Е. Ю. Комендантская

abstract. A set of three-valued regular monotonic logics is introduced in the article. The main attention is paid to intermediate regular logics: **Lisp** and the dual to **Lisp** logic. We show that the lattice structure of Lisp is non-commutative algebra of Kleene and the set of three-valued regular logics forms four-element lattice by the partial ordering of D-containment.

Ключевые слова: трехзначные логики Клини, промежуточные регулярные логики.

В данной статье будет описано семейство трехзначных регулярных монотонных логик. Наиболее известные из них — сильная и слабая логики Клини.

Но, кроме того, существует еще две монотонные регулярные трехзначные логики. Идея создания многозначных регулярных логик принадлежит С. Клини. Главная проблема, которая возникала при введении в логику нового истинностного значения — определения трехзначных логических связок. С. Клини приходит к выводу, что таблицы для пропозициональных связок нужно выбирать регулярными в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.

Также часто в литературе встречается свойство монотонности [9, 10, 11, 12]. В [6] было доказано, что множество трехзначных регулярных логик включается во множество монотонных логик. Поэтому впредь при описании свойств логик Клини регулярность будет упоминаться в первую очередь как наиболее сильное свойство. Регулярные связки различаются «по силе».

Сначала мы рассмотрим сильный (strong) смысл пропозициональных связок, которые Клини определяет следующими сильными таблицами:

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$\equiv$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Как подчеркивает Клини, эти сильные таблицы однозначно определяются как самые сильные из возможных регулярных расширений классических 2–значных таблиц, т.е. они регулярны и имеют 1 или 0 в каждом месте, где какое-либо регулярное расширение 2–значных таблиц может содержать 1 или 0 (что именно: 1 или 0, — это определено однозначно).

Другой пример регулярных трехзначных таблиц — это так называемые слабые связки Клини–Бочвара. Они получаются путем заполнения символом $\frac{1}{2}$ всех столбцов и строк, где хотя бы один раз встречается символ $\frac{1}{2}$.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\cup$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\cap$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\equiv$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Но помимо широко известных регулярных и монотонных логик Клини $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$ существуют еще две отличные от них трехзначные регулярные логики. Таблицы для конъюнкции и дизъюнкции одной из них были предложены Фиттингом [10]. Первоначально такая промежуточная регулярная логика была названа им **Lisp**. Причем в данной работе Фиттинг отмечает, что любая промежуточная регулярная логика — будет иметь средние значения между сильной и слабой логикой Клини. Свою логику он описывает следующим образом:

Оценка выражений должна вестись по предложениям, входящим в него. Например, мы оцениваем выражение $P \cap Q$, скажем слева направо, так что предложение P мы оцениваем первым. Если P приписано значение «ложно», то работа по приписыванию значений останавливается и всему выражению $P \cap Q$ приписывается значение «ложь». Если P имеет значение «истина», то далее проводится приписывание значений Q, и значение Q — становится значением всего выражения $P \cap Q$. Это ассиметричная или позиционная логика. Например, Если P — ложно, а Q — не определено ($\perp$), то выражение $P \cap Q$ — будет ложным, а $Q \cap P$ — примет значение $\perp$. Впредь значение $\perp$ мы будем обозначать как $\frac{1}{2}$.

Реконструируем оставшиеся связки логики **Lisp**, а также рассмотрим ее свойства.

Кроме того, в данной части статье будет уделено большое внимание взаимоотношениям трехзначных регулярных логик. Будут рассмотрены основные виды отношения включения на множестве многозначных логик, а также будет рассмотрен вопрос о том, возможно ли установить решеточную структуру на множестве трехзначных регулярных логик.

1 Логика Lisp

Связки логики **Lisp**, условимся обозначать ее $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, могут быть представлены следующим образом.

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$\equiv$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Эта логика является регулярной в смысле Клини: данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0.

Также можно доказать, что логика $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ также является монотонной.

2 Логика дуальная к Lisp

Логику, дуальную к **Lisp**, условимся обозначать $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Ее связки определяются следующим образом:

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\equiv$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Эта логика также является регулярной и монотонной. Регулярность может быть проверена по определению Клини, монотонность доказывается аналогично с монотонностью **Lisp**.

3 Решеточные свойства регулярных трехзначных логик

Рассмотрим решеточные свойства четырех представленных логик.

Итак, логики $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ идемпотентны:

(a) $x \vee x = x$

(b) $x \wedge x = x$

$\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$ — коммутативны, но $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ не коммутативны, то есть не выполняются соотношения:

(a) $x \vee y = y \cup x$

Так, например, для $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, если $x = \frac{1}{2}$, а $y = 1$, то $x \vee y$ примет значение 1, а $y \vee x$ примет значение $\frac{1}{2}$.

(b) $x \wedge y = y \wedge x$

Так, если $x = 0$, а $y = \frac{1}{2}$, то значение $x \wedge^{\rightarrow} y$ будет равно 0, а $y \wedge^{\rightarrow} x$ — $\frac{1}{2}$.

Далее, в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ имеют место законы ассоциативности и дистрибутивности, в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ проходит закон поглощения, а $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ проходит закон Клини (причем в $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ законы поглощения, а в $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ закон Клини выполняются только при условии, что переставлены местами дизъюнктивные и конъюнктивные члены):

Ассоциативность:

(a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

Поглощение в $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$:

(a) $x \vee (x \wedge y) = x$

(b) $x \wedge (x \vee y) = x$

Поглощение в $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$:

(a) $(y \wedge x) \vee x) = x$

(b) $(y \vee x) \wedge x) = x$

Не претерпевает изменения ни один из законов дистрибутивности:

(a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Во всех перечисленных логиках сохраняется истинность законов *де Моргана*, так как для одноместного оператора $\sim$ (инволюция) выполняются тождества:
$\sim\sim x = x$
$\sim (x \vee y) =\sim x \wedge \sim y$
$\sim (x \wedge y) =\sim x \vee \sim y$.
А также имеет место закон Клини:

(K') $(x \wedge \sim x) \vee (y \vee \sim y) = y \vee \sim y$,

в $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ при условии, что дизъюнктивные члены переставлены местами:

(K') $(y \wedge \sim y) \vee (x \vee \sim x) = y \vee \sim y$.

Таким образом, трехзначная логика **Lisp**, а также дуальная к ней логика, являются **некоммутативными алгебрами Клини**.

Для сравнения: сильная логика Клини $\mathbf{K}_3$, является моделью алгебры Клини, в ней имеют место все вышеперечисленные законы, в слабой логике Клини $\mathbf{K}_3^W$, не имеют места законы поглощения и закон Клини, соответственно $\mathbf{K}_3^W$ является квазирешеткой. В $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, в отличие от $\mathbf{K}_3^W$, проходят законы поглощения и закон Клини (в них переставлены местами дизъюнктивные члены), но не проходит коммутативность. В $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ имеют место все законы что и в $\mathbf{K}_3$, кроме коммутативности, в том числе и поглощение и закон Клини без каких либо изменений.

4 Взаимоотношения регулярных трехзначных логик.

Рассмотрение взаимоотношений трехзначных регулярных логик необходимо предварить рассмотрением некоторых видов отношения включения, которые возможно установить между многозначными логиками. Соответствующая классификация представлена в книге Решера «Многозначные логики» [12]. Одна многозначная логика может содержаться в другой в нескольких разных смыслах.

1. Система X может содержать систему Y в следующем смысле: каждая тавтология системы X (в соответствии с истинностными таблицами) является тавтологией системы Y. В таком случае говорят, что X *T-содержит* Y (то есть содержит в смысле включения множества тавтологий одной логики в множество тавтологий другой). Например, большинство многозначных логик содержаться в $\mathbf{C}_2$.

2. Система X может содержать систему Y в следующем смысле:

   (1) все истинностные значения Y также являются истинностными значениями X и

   (2) если в таблице истинности для X вычеркнуть или стереть все колонки и ряды, которые являются дополнительными к таблице истинности Y, то останется просто таблица истинности для Y.

   В таком случае говорят, что система X *S-содержит* систему Y (от слова пересечение (suppression). Например, $\mathbf{K}_4$ *S-содержит* $\mathbf{K}_3$.

3. Система X также может содержать систему Y, если мы можем идентифицировать каждое истинностное значение X с каким-либо истинностным значением Y, возможно, теряя в ходе этого процесса какие-либо истинностные значения, имевшиеся в системе Y. В этом случае говорят, что система X *I-содержит* Y (в смысле отождествления (identification)).

   Существуют алгебраические эквиваленты для некоторых типов включения. Так, X *S-содержит* систему Y, если Y является субалгеброй X. X *I-содержит* Y, если Y — это гомоморфное отображение X. И только для *T-включения* нет эквивалента в универсальной алгебре.

4. D-включение имеет место, когда все связки одной системы могут быть выражены через связки другой. Как было показано
   ранее, $\mathbf{K}_3$ может быть определена через $\mathbf{L}_3$, то есть $\mathbf{L}_3$

D-содержит $\mathbf{K}_3$ (то есть включение одной логики в другую происходит посредством определения связок одной через связки другой (definition).

Можно доказать следующие соотношения:

(1) S-включение влечет T-включение, но не наоборот.

(2) I-включение в общем случае не влечет T-включения, и наоборот.

(3) S-включение не влечет I-включения, и, обратно, I-включение не влечет S-включения.

Перейдем теперь к рассмотрению отношений между регулярными трехзначными логиками.

Итак, были рассмотрены все регулярные трехзначные логики: $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Поскольку таблицы истинности для одних и тех же связок этих логик различны, то не может идти речи об S- или I-включении. Однако очевидно, что мы с легкостью находим T- и D-включения между регулярными трехзначными логиками.

Обсудим сначала отношение T-включения. Что касается тавтологий, то ни одна из перечисленных логик не имеет тавтологий при одном выделенном значении. Таким образом, T-включение этих логик одна в другую следует из того факта, что пустое множество включается в пустое множество.

Рассмотрим отношение D-включения. Как было определено ранее, отношение D-включения имеет место, если связки одной системы представимы через связки другой.

Одним из первых проблемой перевода связок одной системы в другую заинтересовался Шестаков В. М. [9], его результаты касались определения функционально полных систем связок для трехзначных логик, а также их взамиовыразимость. Как известно, вслед за переводами Шестакова появился перевод слабых связок Клини–Бочвара посредством сильных связок Клини, осуществленный В. К. Финном [8]:

$$p \cap q = (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$$

Очевидно, этот перевод не является единственно возможным. Мы предлагаем собственный вариант перевода слабой конъюнкции Клини–Бочвара через сильные связки Клини:

$$p \cap q = (p \wedge q) \vee ((p \vee q) \wedge \sim (p \vee q))$$

Другой интересный результат был получен Павловым С. А. []: Логика Клини $\mathbf{K}_3^W$ со связками в слабом смысле, обогащенная связкой полной эквивалентности, функционально эквивалентна логике Бочвара $\mathbf{B}_3$.

Также было показано, что хотя слабые связки и выразимы через сильные, но обратное соотношение не имеет места. То есть было показано, что между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$ существует отношение D-включения. Покажем, что между всеми четырьмя логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ существует отношение D-включения, и таким образом докажем высказанное Фиттингом предположение о том, что все регулярные связки, отличные от $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, являются промежуточными между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$.

ТЕОРЕМА 1. *Логика* **Lisp** *является промежуточной между сильной логикой Клини и слабой логикой Клини-Бочвара, то есть* $\mathbf{K}_3^W$ *D-включается в* **Lisp**, *а* **Lisp** *D-включается в* $\mathbf{K}_3$.

Для доказательства теоремы достаточно осуществить определения связок **Lisp** через сильные связки Клини и слабых связок через связки **Lisp**.

Определения могут быть осуществлены следующим образом:

$p \cap q = (p \wedge^{\rightarrow} q) \vee^{\rightarrow} (q \wedge^{\rightarrow} p)$

$p \cup q = (p \vee^{\rightarrow} q) \wedge^{\rightarrow} (q \vee^{\rightarrow} p)$

$p \vee^{\rightarrow} q = (\sim p \wedge q) \vee p$

$p \wedge^{\rightarrow} q = (\sim p \vee q) \wedge p.$

Поскольку отрицание одинаково во всех рассматриваемых логиках, то ясно, что с помощью отрицания и конъюнкции либо дизъюнкции могут быть выражены импликация и эквиваленция. Заметим, что импликация в **Lisp** определяется через отрицание и дизъюнкцию обычным способом.

Итак, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ может быть выражена через $\mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^W$ — через $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$.

Обратное же не имеет места, иначе можно было бы доказать, что $\mathbf{K}_3$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, и $\mathbf{K}_3^W$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, а, значит, и то, что $\mathbf{K}_3$, эквивалентно $\mathbf{K}_3^W$, что неверно.

ТЕОРЕМА 2. $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ *является промежуточной между* $\mathbf{K}_3$ *и* $\mathbf{K}_3^W$, *то есть* $\mathbf{K}_3^W$ *D-включается в* **TwinLisp**, *а* **TwinLisp** *D-включается в* $\mathbf{K}_3$.

Для доказательства осуществим определения более слабых связок через более сильные и докажем, что противоположные переводы не могут быть осуществлены.

$p \cap q = (p \wedge^{\leftarrow} q) \vee^{\leftarrow} (q \wedge^{\leftarrow} p)$

$p \cup q = (p \vee^{\leftarrow} q) \wedge^{\leftarrow} (q \vee^{\leftarrow} p)$

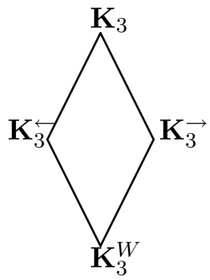
$p \vee^{\leftarrow} q = (p \wedge \sim q) \vee q$

$p \wedge^{\leftarrow} q = (p \vee \sim q) \wedge q.$

Факт, что обратные определения не возможны, доказывается от противного. Если бы $\mathbf{K}_3$ можно было выразить через $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, а $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ через $\mathbf{K}_3^W$, то $\mathbf{K}_3$ было бы эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, и $\mathbf{K}_3^W$ эквивалентно $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, а, значит, $\mathbf{K}_3$ было бы эквивалентно $\mathbf{K}_3^W$, что неверно.

Таким образом, **Lisp** и дуальная к ней логика являются промежуточными регулярными логиками между $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_3^W$.

Взаимосвязь рассмотренных логик можно было бы представить в виде следующей алгебраической структуры.



Однако встает вопрос: является ли эта структура решеточной или нет. Согласно определению решеточного порядка [7]: *Отношение порядка на множестве A называется отношением решеточного порядка, если для любых $a, b \in A$ элементы sup (a,b) и inf (a,b) существуют.* Соответственно, у нас имеется четырехэлементное множество, элементами которого являются рассмотренные трехзначные логики, и для доказательства существования между этими логиками решеточного порядка необходимо доказать существование супремума и инфинума для любых двух элементов данного множества. Между логиками $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$,

$\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ было обнаружено отношение порядка по отношению выразимости одного множества связок через другое. Это отношение действительно является отношением порядка, поскольку оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Рассмотрим, отвечает ли это отношение требованиям, необходимым для решеточного порядка. Обозначим отношение D-включения как $\subseteq^D$. Предположим, что $\mathbf{K}_3$ является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом. Тогда должны иметь место следующие соотношения:

i). $\mathbf{K}_3$ — верхняя грань множества всех регулярных трехзначных логик: $\forall X(X \subseteq^D \mathbf{K}_3)$. Доказательство ведется простой проверкой всех четырех регулярных трехзначных логик.

ii). $\mathbf{K}_3^W$ — нижняя грань этого множества: $\forall X(\mathbf{K}_3^W \subseteq^D X)$. Доказательство ведется аналогично.

iii). $\mathbf{K}_3$ — наименьший элемент множества всех верхних граней нашего множества (это положение очевидно, так как множество всех верхних граней множества трехзначных регулярных логик содержит только один элемент).

iiii). $\mathbf{K}_3^W$ — наибольший элемент множества всех нижних граней множества всех регулярных трехзначных логик. (Также следует из того, что $\mathbf{K}_3^W$ — единственная нижняя грань данного множества).

Итак, доказано, что выявленная нами алгебраическая структура представляет решетку.

Отметим также, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cup \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq^D \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} \subseteq^D \mathbf{K}_3^W$. Однако не верно, что $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cup \mathbf{K}_3^{\leftarrow} = \mathbf{K}_3$, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} = \mathbf{K}_3^W$.

Если объединение и пересечение проводится по множеству связок, то пересечение $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ не дает $\mathbf{K}_3^W$, а объединение — $\mathbf{K}_3$.

ТЕОРЕМА 3. *Через множество связок, полученное путем объединения множества связок логики* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ *с множеством связок логики* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, *не возможно получить сильные связки логики Клини* $\mathbf{K}_3$.

Доказательство. Допустим, что существует формула, представляющая выражение какой-либо двухместной связки К3 через связки $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. Но, поскольку логики $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ взаимовыразимы (имеют место следующие тождества: $x \vee^{\rightarrow} y = y \vee^{\leftarrow} x, x \wedge^{\rightarrow} y = y \wedge^{\leftarrow} x$, $x \supset^{\rightarrow} y = y \supset^{\leftarrow} x$), то искомая формула может быть преобразована в формулу, содержащую только связки $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ или $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$. И, таким образом, мы получили бы формулу, с помощью которой мы могли бы доказать эквивалентность системы связок $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$(или $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$) и $\mathbf{K}_3$. Но, как было показано в теоремах 1 и 2, это не возможно. Теорема доказана. Q.E.D.

ТЕОРЕМА 4. *Через множество связок, полученное путем пересечения множества связок логики* $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ *с множеством связок логики* $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$, *не возможно получить слабые связки логики Клини* $\mathbf{K}_3^W$.

Доказательство. Пересечение множеств связок логик $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ дает следующее множество связок: $\{\equiv, \sim\}$. Нужно отметить, что эквивалентность в логиках $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_3^W$, $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$, $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ определяется с помощью таблиц истинности абсолютно одинаково. То есть искомый перевод $\mathbf{K}_3^{\rightarrow} \cap \mathbf{K}_3^{\leftarrow} = \mathbf{K}_3^W$ должен был бы заключаться в определении всех связок $\mathbf{K}_3^W$ через $\{\equiv, \sim\}$. Но множество $\{\equiv, \sim\}$ не является полной системой связок даже для классической логики, то есть любая возможная формула выразимости $\wedge$, $\vee$ или $\supset$ через $\{\equiv, \sim\}$ будет проваливаться как минимум на классических значениях. Теорема доказана. Q.E.D.

Таким образом, были рассмотрены все возможные регулярные трехзначные логики, было рассмотрены их решеточные свойства, в том числе было определено, что $\mathbf{K}_3$ — представляет собой решетку, а также модель алгебры Клини, $\mathbf{K}_3^W$ — квазирешетка, а $\mathbf{K}_3^{\rightarrow}$ и $\mathbf{K}_3^{\leftarrow}$ — некоммутативные алгебры Клини. Кроме того, было показано, что множество всех трехзначных регулярных логик образует решетку по отношению D-включения, причем $\mathbf{K}_3$ — является супремумом, а $\mathbf{K}_3^W$ — инфинумом.

Литература

[1] *Бочвар Д. А.* Об одном трёхзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. Т.4. №2. С.287-308. 1938.

[2] *Бочвар Д. А.* К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления//Математический сборник. Т.12. №3. С.353-359. 1944.

[3] *Гретцер Г.* Общая теория решеток. Мир, М., 1982. (Перевод с англ.: G. Gretzer. General lattice theory: Springer-Verlag, Berlin 1978).

[4] *Карпенко А. С.* Многозначные логики (монография). Логика и компьютер. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

[5] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

[6] *Лукьяновская Е. Ю.* Дипломная работа «Регулярные логики Клини». Кафедра логики философского ф-та МГУ. 2003.

[7] *Расева Е., Сикорский В.* «Математика метаматематики» М.:Наука, 1972

[8] *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр// Философия в современном мире: Философия и логика. М.1974, с.398-438

[9] *Шестаков В. И.* «О взаимоотношениях некоторых трехзначных логических исчислений»// Успехи математических наук, т.19, вып.2 (116), с.177-181, 1964

[10] *Fitting M.* Kleene's Three Valued Logics and Their Children// http://comet.lehman.cuny.edu/fitting/

[11] *Kripke S. A.* Outline of a theory of truth // Journal of Philosophical Logic, 72: 690-716, 1975.

[12] *Rescher N.* Many-valued logics. N.Y.,1969, p.55-62, 71-76.

[13] *Turner R.* Three-valued logics and their computational interpretations.