

TOPOLOGIE, THÉORIE DES GROUPES
ET PROBLÈMES DE DÉCISION
—
CÉLÉBRATION D'UN ARTICLE DE MAX DEHN
DE 1910

PIERRE DE LA HARPE

ABSTRACT. This paper, in French, is a celebration of Max Dehn, and an essay of describing now some of his results published in the beginning of the 1910's. It has been written up for a winter school in Les Diablerets, March 7–12, 2010:

*Geometry, topology and computation in groups,
100 years since Dehn's Decision Problems.*

RÉSUMÉ. Ce texte est une célébration de Max Dehn et un essai de mise en perspective de quelques-uns de ses résultats publiés au début des années 1910. Il a été rédigé à l'occasion d'une école d'hiver aux Diablerets du 7 au 12 mars 2010 :

*Geometry, topology and computation in groups,
100 years since Dehn's Decision Problems.*

1. ÉLÉMENTS BIOGRAPHIQUES

Max Dehn est né à Hamburg en 1878, et mort à Black Mountain (Caroline du Nord, U.S.A.) en 1952. Il fut étudiant de Hilbert à Göttingen en 1899 et acheva en 1900 une thèse sur les fondements de la géométrie.

En 1900 également, il résolut le *troisième problème de Hilbert*, en montrant que deux tétraèdres de même volume dans $\mathbf{R}^3$ ne sont pas nécessairement équidécomposables. Il en résulte que, contrairement à la théorie des aires des polygones dans $\mathbf{R}^2$, la théorie des volumes des polyèdres dans $\mathbf{R}^3$ doit reposer sur la notion de limite, ou sur

Date: 27 mars 2010.

2000 Mathematics Subject Classification. 01A60, 20F10 57M25 57M35.

Key words and phrases. Max Dehn, problèmes de décision, nœuds, lemme de Dehn, diagrammes de Cayley, Dehn's Gruppenbilder, sphères d'homologie, fonctions de Dehn, groupes de présentation finie, variétés de dimension 3 et 4.

L'auteur a très largement profité de nombreuses conversations avec Claude Weber, d'abord au siècle passé pour son éducation topologique en général, et plus récemment pour la rédaction de ce texte en particulier.

son ancêtre qui est la méthode d'exhaustion d'Eudoxe (-408 – -355), Euclide (~ - 325 – ~ - 265) et Archimède (~ - 287 – -212). [Bien sûr, le sujet n'est pas clos ! [Zeem-02].]

Après un bref séjour comme assistant à Karlsruhe, Dehn fut privat-docent à Münster jusqu'en 1911 ; durant cette période, sous l'influence de Poul Heegard et Henri Poincaré, il commença à s'intéresser à la topologie et à la théorie des groupes. En 1907, Dehn et Heegard publièrent le panorama de l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* sur l'Analysis Situs [DeHe-07] ; ce texte contient une définition et une classification des surfaces du point de vue de la topologie combinatoire. Et c'est en 1910 que Dehn publia le premier des articles majeurs où apparaissent les *problèmes de décision*.

Dehn fut ensuite professeur assistant à Kiel (1911–13), professeur ordinaire à Breslau (1913–21), avec une interruption due au service armé (1915–18), et successeur de Bieberbach à Francfort (1922–35). Le séminaire d'histoire des mathématiques qu'il y dirigea semble avoir été un grand moment pour tous les participants [Sieg-64]. Il fut patron de thèse de

- Hugo Gieseking (1912), qui construisit une variété hyperbolique de dimension 3, non orientable, dont Thurston nota que le revêtement orientable est isométrique au complément d'un nœud de huit, avec sa structure de variété hyperbolique (re?) découverte en 1975 par Robert Riley (voir par exemple [Miln-82]) ;
- Jakob Nielsen (1913), l'un des fondateurs de la théorie combinatoire des groupes, dont les travaux sur les difféomorphismes de surface sont de grande importance [Thur-88] ;
- Ott-Heinrich Keller (1929), dont la thèse sur les pavages de $\mathbf{R}^n$ par des cubes contient une conjecture aux nombreuses ramifications, autant que je sache toujours ouverte lorsque $n = 7$ (voir le chapitre 7 de [Zong-05]) ; Keller formula aussi la “conjecture du jacobien”, chère à Abhyankar ;
- Wilhelm Magnus (1931), qui démontra dans sa thèse le “Freiheitssatz” formulé par Dehn, sur les groupes à un relateur, et qui s'illustra plus tard dans de multiples domaines [Magn-94] ;
- Ruth Moufang (1931), dont la thèse portait sur la géométrie projective et à qui on doit des contributions majeures sur les structures algébriques non associatives. Pour illustration : dans sa construction du “monstre” (le plus grand groupe fini simple sporadique), Conway a utilisé une “Moufang loop” construite par Parker ;

liste à laquelle le “Mathematics Genealogy Project” ajoute Herbert Fuss (1913), Wilhel Schwan (1923), Max Frommer (1928), et Joseph Engel (1949).

En été 1935, Dehn fut démis de son poste pour raison d’ascendance juive. Il continua à (sur)vivre en Allemagne jusqu’en 1939, avant de s’échapper vers les Etats-Unis via Copenhague, Trondheim, la Finlande, le Transsibérien et le Japon. Après divers postes de courtes durées, il termina sa carrière au petit collège de Black Mountain, dans l’est des Etats-Unis (1945–52).

Il y fut l’unique professeur de mathématiques ; il y enseigna aussi la philosophie, le latin et le grec. Ce collège, fondé en 1933, avait des objectifs pédagogiques originaux et ambitieux¹ qui plurent à Dehn. Son salaire mensuel initial était de 40 \$, plus logé, nourri, blanchi. (C’était mieux que l’offre initiale, qui était de 20 \$; mais Siegel raconte qu’il y eut des périodes pendant lesquelles l’argent de poche, en complément du gîte et du couvert, était limité à 5 \$ par mois.) Le collège avait des problèmes financiers et ferma en 1956. Dehn y avait eu de longues conversations avec un collègue architecte, aujourd’hui célèbre pour ses constructions utilisant des polyèdres réguliers : Richard Buckminster Fuller [BuFu]. Dehn était aussi naturaliste amateur et randonneur enthousiaste [Sher–94].

Pour en lire davantage sur la vie et la production mathématique de Dehn, voir [Magn–78], [Stil–99] et [Daws–02].

2. LES TROIS PROBLÈMES DE DÉCISION DE DEHN

Dans trois articles publiés de 1910 à 1912, Max Dehn a formulé et étudié les trois *problèmes de décision* suivants qui sont fondamentaux en théorie combinatoire des groupes.

- (WP) **Le problème du mot** : pour un groupe G engendré par des éléments $s_1, s_2, \dots, s_n$, *trouver une méthode qui permette de décider en un nombre fini de pas si deux produits des opérations s_i de G sont égaux, en particulier si un tel produit d’opérations est égal à l’identité.*
- (CP) **Le problème de conjugaison** : pour G et les s_i comme ci-dessus, *trouver une méthode qui permette de décider en un nombre fini de pas, étant donnés deux substitutions S et T de G , s’il existe une troisième substitution U de G telle que $S = UTU^{-1}$, c’est-à-dire si S est un conjugué de T .*

¹“The college sought to educate the whole student – head, heart and hand – through studies, the experience of living in a small community and manual work.” Ceci est bien plus sur le site <http://www.bmcproject.org/index.htm>

Ces deux problèmes sont formulés dans [Dehn–10], ici traduits de la version anglaise, page 95 de [DeSt–87]. La formulation de [Dehn–11] est légèrement différente.

(IsoP) **Le problème d’isomorphisme** : *étant donné deux groupes, décider s’ils sont isomorphes ou non (et de plus si une correspondance donnée entre les générateurs d’un groupe et les éléments de l’autre est ou n’est pas un isomorphisme).*

Problème formulé dans [Dehn–11], page 134 de [DeSt–87].

Dans une formulation concise, reprise de [Mill–92], :

- $WP(G) = (?w \in G)(w =_G 1)$,
- $CP(G) = (?u, v \in G)(\exists x \in G)(x^{-1}ux =_G v)$,
- $\text{IsoP} = (? \pi_1, \pi_2 \text{ présentations finies})(gp(\pi_1) \approx gp(\pi_2))$.

Ici, “?...” est une espèce de quantificateur, signifiant par exemple pour $WP(G)$, “le problème de décider, pour un $w \in G$ arbitraire, si oui ou non $w =_G 1$ ”. Les deux premiers problèmes de décision de Dehn ont des formulations topologiques, et le troisième est également lié à une question topologique :

- (WP) dans un espace topologique de groupe fondamental G , est-ce qu’un lacet “donné” est contractile sur un point ?
- (CP) est-ce que deux lacets “donnés” sont librement homotopes ?
- (IsoP) est-ce que deux espaces “donnés” sont homotopiquement équivalents ?

(les guillemets parce que nous n’allons pas essayer de préciser ce que “donné” veut dire).

Quelques premières remarques :

(i) A priori, la réponse au problème du mot dépend de la présentation considérée du groupe. Toutefois, si $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$ et $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ sont deux présentations finies d’un même groupe G , un argument simple montre *qu’il existe* “une méthode qui permette de décider ...” pour une présentation si et seulement s’il en existe une pour l’autre. Il peut néanmoins être plus délicat *d’exhiber* une méthode pour $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ à partir d’une méthode pour $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$. Des remarques analogues valent pour le problème de conjugaison.

(ii) Si le problème de conjugaison est résoluble pour un groupe G , alors le problème du mot l’est aussi, puisqu’un élément de G est égal à l’identité si et seulement s’il est conjugué à l’identité. La réciproque n’est pas vraie.

(iii) Voici un exemple à propos du problème d’isomorphisme : le groupe donné par la présentation

$$\langle s, t \mid s^3t, t^3, s^4 \rangle$$

est le groupe à un élément. Ce n'est peut-être pas tout à fait évident, mais c'est vrai : $s = ss^3t = s^4t = t$ et $1 = s^3tt^{-3} = s = t$.

(iv) Les articles de Dehn sont bien antérieurs aux définitions précises de mots comme “algorithmes” ou “procédés” ou “méthodes” ; en fait, c'est un des grands succès de la logique mathématique que d'avoir donné un sens précis aux problèmes de Dehn (Post, Church, Turing, Gödel, ... dans les années 1930).

Ce n'est que dans les années 1950 qu'il fut démontré que ces problèmes sont insolubles pour certains groupes de présentation finie : Piotr Sergueïevitch Novikov² démontra que le problème de conjugaison est insoluble (1954), Boone et Novikov que le problème du mot est insoluble (1955), et Adjan et Rabin que le problème d'isomorphisme est insoluble (1958). Fridman montra que le problème du mot peut être résoluble et le problème de conjugaison insoluble pour le même groupe (1960) ; Miller (1971) a montré que c'est même le cas pour un groupe qui s'insère dans une suite exacte courte à noyau et quotient libres (théorème 4.8 de [Mill–92]). Pour en savoir plus, voir [Mill–71], [Mill–92] et [Stil–82].

(v) Les problèmes de décision furent formulés par Dehn dans le contexte de la *topologie de dimension 3* et de la *théorie des nœuds*³. Il faut garder en tête que la topologie algébrique était de création récente : on peut la dater de 1895, année de parution de l'*Analysis situs* [Poin–95]⁴.

²A ne pas confondre avec son fils Sergueï Petrovitch Novikov, lauréat de la médaille Fields en 1970, pour des travaux portant entre autres sur le cobordisme, les feuilletages, et l'invariance topologique des classes de Pontrjagin d'une variété différentiable.

³Dès 1867, le physicien écossais Peter Guthrie Tait avait commencé à dresser des tables de nœuds ; mais il n'y a pas de topologie dans les travaux de Tait, et a fortiori pas de groupes de nœuds. La théorie des nœuds intervient aussi dans l'étude des singularités isolées des fonctions de deux variables complexes, comme cela est apparu vers 1905 dans les recherches de Wirtinger ; celles-ci n'eurent qu'une diffusion limitée à l'époque. Ce n'est que bien plus tard que la théorie des nœuds devint “respectable” pour cette raison, lorsque les recherches de Wirtinger furent reprises par Brauner (dans son habilitation de 1928 sous la supervision de Wirtinger), Kähler, Zariski et Burau ; voir [Eppl–95], déjà cité, ou les pages 318-320 de [Eppl–99a]. Ce lien entre nœuds et singularités ne semble pas avoir joué de rôle dans les motivations de Dehn.

⁴Plus une *Note* préliminaire de 1892 et les cinq *compléments* publiés entre 1899 et 1904 [Poin–04], notamment suite à la thèse de Heegaard (1898) qui mettait en évidence une erreur de Poincaré (oubli de la partie de torsion des groupes d'homologie). On peut souligner la rapidité d'une certaine évolution : les motivations explicites de Poincaré étaient liées à l'analyse : courbes définies par des équations différentielles, problème des trois corps, fonctions multi-valuées à deux variables, périodes des intégrales multiples, calculs de perturbation, ... ; mais la

L'intérêt de Dehn pour la topologie avait peut-être été éveillé (entre autres) par sa résolution d'un "exercice" que lui avait donné Hilbert, c'est-à-dire par sa démonstration du théorème de Jordan pour les polygones plans. Le travail de Dehn ne fut pas publié [Gugg-77].

Dehn avait espéré résoudre la *conjecture de Poincaré*, concernant les variétés closes de dimension 3 à groupe fondamental trivial. Plus précisément, le 12 février 1908, Dehn avait envoyé à Hilbert un article contenant un "résultat" sur $\mathbf{R}^3$ équivalent à la conjecture de Poincaré, article soumis pour publication dans les "Göttinger Nachrichten". Mais Tietze signala une erreur dans l'argument de Dehn, qui retira son article par une lettre du 16 avril de la même année. (D'après la page 388 de [Eppl-95].) Ainsi Dehn fut-il "la première victime de la conjecture de Poincaré" (selon une formule de K. Volkert, 1996).

(vi) Les lecteurs au courant des articles de l'époque notent que le problème d'isomorphisme avait déjà été formulé par Tietze en 1908, mais sans que Tietze lui donne l'importance que Dehn donna à ses formulations.

Bien que Tietze et Dehn comptent tout deux parmi les fondateurs de la topologie, et en particulier de la théorie des nœuds qui donna à Dehn l'occasion de formuler ses problèmes de décision, les influences qu'ils eurent chacun sur l'autre à cette époque semblent avoir été limitées (nonobstant ce qui est rapporté plus haut). Tietze, étudiant à Vienne de 1898 jusqu'à son habilitation en 1908 (avec une année à Munich), était sous l'influence de Wirtinger, et par lui dans le sillage de Klein, alors que Dehn, étudiant à Göttingen, était marqué par l'influence directe et bien différente de Hilbert. Voir [Eppl-95], en particulier la page 395.

(vii) La formulation par Dehn des problèmes de décision fut tout à fait importante et originale en théorie des groupes. Mais ce ne sont pas les seuls problèmes de décision qui puissent être formulés ! Ne mentionnons ici que le dixième problème de Hilbert : *De la possibilité de résoudre une équation diophantienne. On donne une équation de Diophante à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : on demande de trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels.* La réponse, négative, résulte des travaux de Martin Davis, Yuri Matiyasevich, Hilary Putnam et Julia Robinson ; le coup de grâce fut donné par Matiyasevich en 1970.

* * * * *

topologie est très vite devenue une discipline autonome de l'analyse, c'est flagrant dans les articles de Dehn.

Toujours est-il que, peu avant 1910, Dehn maîtrisait aussi bien que quiconque à l'époque des sujets que nous énumérons comme suit ; ceci dans le vocabulaire d'aujourd'hui, donc en termes parfaitement anachroniques.

(♠) La notion de *présentation d'un groupe*

$$G = \langle S \mid R \rangle = \langle s_1, \dots \mid r_1, \dots \rangle$$

donné comme quotient $G = F/R$ d'un groupe libre F de base $S = \{s_1, \dots\}$ par le sous-groupe normal engendré par les “relations” $R = \{r_1, \dots\}$. La notion fut précisée par Walther von Dyck (1882), suite à des travaux sur les groupes discontinus apparaissant en théorie des fonctions de variables complexes, dont ceux de son maître Felix Klein.

(♡) Le *groupe fondamental* d'un espace topologique, qui fut introduit par Poincaré en 1895 dans son *Analysis situs*⁵. En particulier, le groupe fondamental d'une variété compacte est un groupe de présentation finie, comme cela apparaît clairement dans l'habilitation de Tietze (1908) ; il en est de même pour le groupe fondamental d'un complexe simplicial fini (et même d'un CW-complexe fini).

(◇) En particulier, un *nœud*, c'est-à-dire une courbe fermée simple K dans l'espace usuel, détermine un groupe G_K , le groupe fondamental du complémentaire du nœud.

On peut facilement écrire une présentation finie de G en termes d'un diagramme plan $\mathcal{D}$ de K . On connaît ainsi la *présentation de Dehn*⁶, dont les générateurs sont en bijection avec les composantes connexes bornées du complémentaire de $\mathcal{D}$ dans le plan et les relations en bijection avec les points doubles de $\mathcal{D}$ (voir par exemple l'appendice de [Kauf–83]), et la *présentation de Wirtinger*, qui remonte à un exposé de Wirtinger de 1905, et qu'on trouve dans presque tous les exposés de théorie des nœuds (par exemple au § 5 de [Rham–69] ou au chapitre 3 de [BuZi–85]). Même si l'exposé de Wirtinger est bien antérieur à l'article de Dehn, “apparemment, Dehn n'était pas conscient du résultat de Wirtinger” (citation de [Magn–78]).

⁵Chez Poincaré, la première définition *explicite* du groupe fondamental est en termes de revêtements [Note de 1892], et la seconde en termes de classes d'homotopie de lacets [Poin–95] ; de plus, on peut voir le groupe fondamental entre les lignes de [Poin–83], au sujet de l'uniformisation des surfaces de Riemann (merci à Etienne Ghys pour cette observation). Quelques détails de plus aux pages 374-376 de [Eppl–95]. Pour lire Dehn, il faut adopter le point de vue des classes de lacets.

⁶Si j'en crois ce qu'affirment les lecteurs plus perspicaces que moi, cette *présentation de Dehn* est expliquée au § 3 du chapitre II de [Dehn–10].

A propos du problème d'isomorphisme, noter que deux diagrammes D, D' d'un même nœud K donnent en général lieu à des présentations distinctes $\pi_D, \pi_{D'}$ du même groupe G_K . De même, il peut être bien difficile de distinguer “à l'oeil nu” si deux diagrammes D, D' définissent ou non le même nœud ou si les présentations correspondantes définissent ou non des groupes isomorphes. Par exemple, Tietze s'est amusé à dessiner deux diagrammes de nœuds D et D' à 48 (sauf erreur) croisements chacun, qui ont l'air identiques (ils se distinguent en un seul croisement), mais D représente le nœud de trèfle et D' le nœud trivial [Tiet-42]. J'imagine qu'il ne serait pas immédiat de décider par force brutale que les présentations correspondantes, à 48 générateurs et 48 relations, définissent deux groupes non isomorphes.

(♣) Vers 1909-1910, Dehn avait donné et rédigé au moins deux chapitres de cours (non publiés de son vivant mais récemment parus en traduction anglaise dans [DeSt-87]), sur la théorie des groupes [Dehn-a] et la topologie des surfaces [Dehn-b]. Il en ressort entre autres que Dehn, comme d'ailleurs beaucoup de ses contemporains, était tout à fait à l'aise avec la *géométrie hyperbolique* (plane). En particulier, l'étude des “groupes fuchsien” conduit à des pavages du plan hyperbolique par des polygones fondamentaux, pavages dont les graphes duaux sont précisément des “Dehn's Gruppenbilder” (souvent synonyme de “graphes de Cayley” ou “diagrammes de Cayley”). Dans ce sens, les “Dehn's Gruppenbilder” doivent beaucoup plus à Dyck, Klein et Fricke qu'à Cayley. Voir les figures de [KlFr-90] et [FrKl-97] ; voir aussi les figures des chapitres XVIII et XIX de [Burn-11].

Le premier article majeur de Dehn [Dehn-10] parut dans le premier cahier du volume 69 des *Mathematische Annalen*, “Ausgegeben am 23. Juni 1910”. On y trouve les nouveautés suivantes ; dans la liste ci-dessous, (n) se réfère au chapitre n du présent texte, dont les chapitres n^{bis} sont consacrés à certains développements plus récents.

- (2) l'énoncé du problème du mot et du problème de conjugaison ;
- (3) le lemme de Dehn, et le critère de trivialité qui en découle pour les nœuds ;
- (4) un diagramme de Cayley (ou plutôt de Dehn !) du groupe du nœud de trèfle ;
- (5) une construction de 3-sphères d'homologie, dont l'une a un groupe fondamental fini non réduit à un élément ;
- (7) tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un 2-complexe (et aussi d'une 4-variété close, voir le chapitre III de [Dehn-11]) ;

excusez du peu. A peine plus tard, Dehn publiera

- (6) des algorithmes pour résoudre le problème du mot et le problème de conjugaison dans les groupes fondamentaux des surfaces orientables ; groupes sur lesquels Dehn considère la *métrie des mots* et note qu'elle est peut remplacer avantageusement la métrique hyperbolique ;
- (-) une démonstration du fait que les nœuds de trèfle gauche et droit ne sont pas isotopes (exposition de cette démonstration au début du chapitre 7 dans [Stil-93]) ;

voir [Dehn-11], [Dehn-12] et [Dehn-14].

Le mélange des genres ci-dessus est révélateur : le développement historique de la théorie combinatoire des groupes est inséparable de celui de la topologie des variétés de basse dimension, ce qui veut dire au sens large de dimension au plus 4, et très souvent, strictement, de dimension 3. Plus précisément, et comme l'écrit Stallings au tout début de [Stal-71] :

“The study of three-dimensional manifolds has often interacted with a certain stream of group theory, which is concerned with free groups, free products, finite presentations of groups, and similar combinatorial matters.

Thus Kneser's fundamental paper had latent implications toward Grushko's Theorem.”

Stallings fait allusion au théorème de Kneser sur la décomposition en somme connexe d'une 3-variété (1929) et au théorème de Grushko sur la décomposition en produit libre d'un groupe de type fini (1940). Voir aussi ci-dessous l'énoncé (*), au chapitre 7.

3. DE L'ÉTUDE DES NŒUDS AUX PROBLÈMES DE DÉCISION LE LEMME DE DEHN

Soit K un *nœud*, c'est-à-dire une courbe fermée simple différentiable (ou PL) dans la sphère $\mathbf{S}^3$. Notons $V(K)$ un *voisinage tubulaire* de K , c'est-à-dire un tore solide $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ plongé dans $\mathbf{S}^3$ de telle sorte que l'image de $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ coïncide avec K , et $E(K) = \mathbf{S}^3 \setminus \text{Int}(V(K))$ l'*extérieur* de K , qui est une variété compacte dont le bord est le tore $\partial E(K) = \partial V(K)$. Le groupe fondamental de $\partial E(K)$, noté G_K , s'identifie à son premier groupe d'homologie ; il est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. [On distingue l'extérieur du *complément* $\mathbf{S}^3 \setminus K$, qui est une variété ouverte sans bord ; l'inclusion de l'extérieur dans le complément est une équivalence d'homotopie.]

Un *méridien* de K est une courbe fermée simple m du tore $\partial E(K)$ qui borde un disque dans $V(K)$. On vérifie qu'une telle courbe est unique

à isotopie près dans le tore, et qu'on peut choisir une courbe fermée simple q dans ce tore de telle sorte que, après choix d'orientations, les classes de m et q constituent une base de $\pi_1(\partial E(K)) \approx \mathbf{Z}^2$; il y a un choix meilleur que d'autres, qui fait l'objet de la définition suivante.

Notons G_K^{ab} l'abélianisé de G_K (ci-dessous noté additivement). C'est un groupe cyclique infini, comme on le voit sur une présentation (de Wirtinger ou de Dehn) de G_K , ou aussi comme cela résulte⁷ de la dualité de Poincaré

$$G_K^{ab} = H_1(E(K)) = H_1(\mathbf{S}^3 \setminus K) \approx H^1(K) \approx \mathbf{Z}.$$

Il en résulte d'une part que le groupe des commutateurs de G_K est le noyau du morphisme d'abélianisation $G_K \longrightarrow G_K^{ab} \approx \mathbf{Z}$, et d'autre part que (comme noté dans [Dehn–10], page 115 de [DeSt–87])

$$(3.1) \quad G_K \text{ est abélien si et seulement si } G_K \approx \mathbf{Z}.$$

De plus, G_K^{ab} est engendré par la classe $[m]^{ab}$ de m . Soit q comme ci-dessus ; soit $x \in \mathbf{Z}$ l'entier tel que $[q]^{ab} = x[m]^{ab}$; notons p une courbe fermée simple dont la classe coïncide avec $[q]^{ab} - x[m]^{ab} = 0$. On vérifie qu'une telle courbe est unique à isotopie près dans le tore ; c'est par définition le *parallèle*⁸ de K . Ainsi les courbes (m, p) définissent (une fois orientées) une base de $\pi_1(\partial E(K)) \approx \mathbf{Z}^2$, unique à isotopie près, donc canonique. [“Unique” à ceci près qu'on peut toujours changer les orientations de m et de p . Toutefois, si on souhaite que le coefficient d'enlacement de m et p soit $+1$, un choix d'orientation pour l'un de m et p impose un choix d'orientation pour l'autre.] Notons encore que, comme la classe de p dans $H_1(E(K))$ est nulle, la classe de p dans G_K est un produit de commutateurs ; par suite :

$$(3.2) \quad \text{si } G_K \text{ est abélien, alors } p = 1 \text{ dans } G_K.$$

(La réciproque résulte du lemme de Dehn, voir plus bas.)

Un nœud $K \subset \mathbf{S}^3$ est *trivial* s'il borde un disque plongé dans $\mathbf{S}^3$. Le groupe d'un nœud trivial est cyclique infini engendré par $[m]$, et le parallèle définit la classe triviale de ce groupe.

⁷Le cas particulier $\pi_1^{ab} \approx H_1$ de l'isomorphisme de Hurewicz était connu de Poincaré [Poin–95].

⁸Dans la littérature, on trouve souvent le mot “longitude” ; c'est un non-sens terminologique, puisque, chez les géographes, une longitude est précisément la coordonnée d'un méridien ! (le *méridien de Greenwich* est celui de longitude 0, la longitude des Diablerets est proche de 7°). Par ailleurs, notons qu'on peut aussi définir p comme l'intersection $S \cap \partial E(K)$ pour une surface de Seifert S de K , intersection qu'on montre être indépendante à isotopie près du choix de S .

Question naturelle. Soit K un nœud de groupe $G_K \approx \mathbf{Z}$; le nœud K est-il trivial ?

Soient M une 3-variété et S une surface plongée dans M . Un *disque de compression* pour S est un disque D plongé dans M tel que (i) $D \cap S = \partial D$ et (ii) ∂D ne borde aucun disque dans S . [Nous utilisons la notation D pour un disque plongé quelque part, et $\mathbf{D}^2$ pour le disque unité du plan euclidien.]

Lemme facile. Soient K un nœud et $E(K)$, G_K comme plus haut. S'il existe un disque de compression D pour le bord $\partial E(K)$ de $E(K)$, alors le nœud K est trivial.

Démonstration. On se réfère à un méridien m et un parallèle p de K , orientés, dont les classes constituent une base de $H_1(\partial E(K))$. A priori, le bord de D (orienté !) définit deux classes d'homologie

$$\begin{aligned} [\partial D]_{\partial E(K)} &= x [m]_{\partial E(K)} + y [p]_{\partial E(K)} \in H_1(\partial E(K)), \\ [\partial D]_{E(K)} &= x [m]_{E(K)} \in H_1(E(K)) \end{aligned}$$

avec $x, y \in \mathbf{Z}$. Or $x = 0$ car ∂D est un bord dans $E(K)$, et $y = \pm 1$ car⁹ ∂D est une courbe fermée simple dans $\partial E(K)$.

On peut donc prolonger D en un disque plongé dans $\mathbf{S}^3$ dont le bord est K , de sorte que K est trivial. $\square$

Revenons à la “question naturelle” ci-dessus, pour un nœud K de groupe $G_K \approx \mathbf{Z}$. On a donc $[p] = 0 \in \mathbf{Z}$, de sorte qu'il existe une homotopie $\varphi : \mathbf{D}^2 \longrightarrow E(K)$ telle que $\varphi(\partial \mathbf{D}^2) = p$. Sans perte de généralité, on peut supposer que φ est un plongement dans un petit voisinage de p , et que l'ensemble singulier

$$\text{Sing}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbf{D}^2 \mid |\varphi^{-1}(\varphi(x))| \geq 2\}}$$

est contenu dans l'intérieur de $\mathbf{D}^2$. Une telle application s'appelle un *disque de Dehn*.

⁹Rappel : sur un 2-tore T^2 , une courbe fermée de classe d'homologie $x[m] + y[p] \in H_1(T)$ est isotope à une courbe fermée *simple* si et seulement si ou bien $x = y = 0$ ou bien $x, y \in \mathbf{Z}$ sont premiers entre eux. Voir la section 2.C de [Rolf-76].

Si l'application φ était un plongement, le nœud K serait trivial, vu le “lemme facile”. Voilà donc de quoi suggérer la formulation¹⁰ du lemme suivant.

Lemme de Dehn. *Soient M une 3-variété et $\varphi : \mathbf{D}^2 \longrightarrow M$ un disque de Dehn.*

Alors il existe un plongement $\psi : \mathbf{D}^2 \longrightarrow M$ tel que les restrictions de φ et ψ à $\partial\mathbf{D}^2$ coïncident.

Remarques. (i) Noter que l'image du bord $\varphi(\partial\mathbf{D}^2)$ est une courbe fermée simple dans M . Noter aussi que le lemme ne dit pas que ψ est une petite déformation de ϕ .

(ii) Le cas particulier du lemme qui permet de répondre à la “question naturelle” formulée plus haut est celui où la courbe $\varphi(\partial\mathbf{D}^2)$ est contenue dans le bord d'une variété compacte orientable avec bord.

(iii) Il n'est pas nécessaire de supposer M compacte et orientable. La réduction du cas non orientable au cas orientable est due à Johansson (1938).

(iv) Si on sait chercher aussi bien que Gordon, on trouve le lemme de Dehn chez Poincaré déjà, dans [Poin–04] ; voir la page 475 de [Gord–99].

Une vingtaine d'années plus tard, plusieurs mathématiciens ont décelé une insuffisance sérieuse dans la démonstration du “lemme de Dehn”. En particulier, Hellmuth Kneser, dans une lettre à Dehn datée du 22 avril 1929, ainsi que van Kampen, Frankl et Pontryagin; voir la page 279 de [Epp1–99b]. Une démonstration fut finalement obtenue par Papakyriakopoulos, connu sous le diminutif de “Papa” [Papa–57b].

Conséquence pour les nœuds. *Soient K un nœud, G_K son groupe, $\iota : \pi_1(\partial E(K)) \longrightarrow G_K$ l'homomorphisme induit par l'inclusion de $\partial E(K)$ dans $E(K)$, et p un parallèle de K , vu ici comme élément de $\pi_1(\partial E(K))$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le nœud K est trivial ;*
- (ii) *le groupe G_K est abélien ; ou encore, voir (3.1),
le groupe G_K est cyclique infini ;*
- (iii) *$\iota(p) = 1$;*

¹⁰Voici l'énoncé de Dehn ; voir [Dehn–10], page 147, et [DeSt–87], page 102. Soit C_2 une surface combinatoire à l'intérieur d'une variété homogène M_n ($n \geq 3$). Soit k une courbe dans C_2 qui borde un disque (singulier) E'_2 . Si E'_2 n'a pas de singularité sur son bord, alors k borde aussi un disque complètement non singulier dans M_n . Comme le note Dehn, l'énoncé est un analogue évident du suivant, en une dimension de moins : dans une surface (connexe), deux points (qui peuvent être connectés par une courbe) peuvent être connectés par une courbe simple. Dehn note aussi que la démonstration est immédiate pour $n \geq 4$ [c'est vrai si $n \geq 5$, et pour le moins douteux si $n = 4$].

(iv) *l'homomorphisme ι n'est pas injectif.*

Démonstration. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) sont immédiates. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la définition de p , selon laquelle l'image de p dans l'abélianisé de G_K est l'élément neutre.

Les implications non banales sont (iii) $\Rightarrow$ (i), qui résulte du lemme de Dehn, et (iv) $\Rightarrow$ (i), qui résulte du théorème du lacet (voir ci-dessous) et du lemme de Dehn. $\square$

L'équivalence de (i) et (iii) montre bien que, si on sait décider entre $\iota(p) = 1 \in G_K$ et $\iota(p) \neq 1$, on sait décider de la trivialité ou non de K .

3^{bis}. QUELQUES “SUITES” DU LEMME DE DEHN

Le “lemme de Dehn” énoncé plus haut fut démontré dans [Papa-57b]. Indépendamment et juste avant, le même auteur avait aussi montré [Papa-57a] :

Théorème du lacet. *Si l'homomorphisme $\iota : \pi_1(\partial_1 M) \longrightarrow \pi_1(M)$ induit par l'inclusion n'est pas injectif, il existe un élément non trivial du noyau représenté par une courbe fermée simple.*

En combinant ces deux énoncés, on obtient le “Loop + Dehn Theorem”, dont Stallings fournit une nouvelle démonstration, ainsi que des généralisations, dans [Stal-60]. Un disque D plongé dans M est *proprement plongé* si $D \cap \partial M = \partial D$.

Cas particulier du théorème “Dehn + lacet” de Stallings. *Si l'homomorphisme $\iota : \pi_1(\partial_1 M) \longrightarrow \pi_1(M)$ induit par l'inclusion n'est pas injectif, alors il existe un élément non trivial du noyau représenté par une courbe fermée simple bordant un disque proprement plongé dans M .*

Dans la foulée, les topologues des années 1950 et 1960 ont montré les résultats suivants (qui ne sont pas énoncés ici de la manière la plus générale possible). Ces résultats ont tous la même structure : soient M une 3-variété, F une surface et $\varphi : F \longrightarrow M$ une application continue qui est “essentielle”, c'est-à-dire “non triviale homotopiquement” (à définir de cas en cas, selon F) ; alors il existe un plongement essentiel de F dans M (ou, dans certains cas exceptionnels, d'une autre surface, voir ci-dessous la “conséquence du théorème du tore”).

Théorème de la sphère ([Papa-57b], J.H.C. Whitehead, 1958). *Si une 3-variété orientable M est telle que $\pi_2(M) \not\approx 0$, il existe un plongement de $\mathbf{S}^2$ dans M représentant un élément non nul de $\pi_2(M)$.*

Comme toute 2-sphère plongée dans un extérieur de nœud $E(K)$ borde une 3-boule (un résultat d'Alexander), il en résulte que le revêtement universel de $E(K)$ est une 3-variété *contractile*.

Notons $\mathbf{A}$ l'*anneau* $\mathbf{S}^1 \times [0, 1]$ et α un arc proprement plongé dans $\mathbf{A}$ connectant les deux composantes de $\partial\mathbf{A}$.

Une application $\varphi : (\mathbf{A}, \partial\mathbf{A}) \longrightarrow (M, \partial M)$ est *essentielle* si l'application induite $\mathbf{Z} \approx \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(M)$ et si $\varphi(\alpha)$ n'est pas homotope relativement à ses extrémités à un arc dans ∂M .

Théorème de l'anneau (Waldhausen [Wald–69], [CaFe–76]). *Soit M une 3-variété compacte orientable et soit $\varphi : (\mathbf{A}, \partial\mathbf{A}) \longrightarrow (M, \partial M)$ une application essentielle.*

Alors il existe un plongement $\psi : \mathbf{A} \longrightarrow M$ tel que les images des composantes connexes de $\partial\mathbf{A}$ par φ et par ψ soient dans les mêmes composantes connexes de ∂M .

Ce théorème permet par exemple d'analyser la situation où deux lacets dans ∂M définissent des éléments conjugués dans $\pi_1(M)$.

Il existe aussi un “théorème du tore” pour les applications d'un 2-tore dans une variété de dimension 3, dont nous ne citons que la conséquence suivante (théorème 7 de [Feus–76]).

Conséquence du théorème du tore ([CaFe–76]). *Soit K un nœud tel que $\pi_1(E(K))$ possède un sous-groupe A isomorphe à $\mathbf{Z}^2$ qui n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe périphérique $\pi_1(\partial E(K))$ ¹¹. Alors :*

- ou bien K est un nœud du tore,
- ou bien il existe un plongement ψ du 2-tore $\mathbf{T}^2$ dans $E(K)$ tel que $\psi_*(\pi_1(\mathbf{T}^2))$ n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe périphérique $\pi_1(\partial E(K))$, de sorte que K est un satellite (par exemple une somme connexe de deux nœuds non triviaux).

3^{ter}. QUELQUES EXEMPLES DE “PROBLÈMES (IR)RÉSOLUBLES”

Décrivons au moins un “processus de décision” montrant qu'il existe des groupes à problème du mot résoluble. Considérons un entier $n \geq 1$ et le *groupe libre* F_n de rang n , avec sa présentation $\langle s_1, \dots, s_n \mid \rangle$. (Il serait bien sûr possible, mais un peu plus compliqué, de considérer une présentation finie *arbitraire* de F_n .)

Ce processus s'applique à un mot w de longueur $|w|$ en les s_i et leurs inverses, et fonctionne en trois pas.

¹¹Autrement dit : soient K un nœud et $\varphi : \mathbf{T}^2 \longrightarrow M$ une application “essentielle”.

- (i) Si $|w| \leq 1$, aller en (iii). Si $|w| \geq 2$, aller en (ii).
- (ii) S'il existe dans w deux lettres consécutives $s_i s_i^{-1}$ ou $s_i^{-1} s_i$, les supprimer et retourner en (i) avec le mot ainsi obtenu, de longueur $|w| - 2$. Sinon, aller en (iii).
- (iii) Si le mot obtenu est vide, écrire $w =_G 1$ et s'arrêter. Sinon, écrire $w \neq_G 1$ et s'arrêter.

(Il y a une étroite analogie avec l'*algorithme de Dehn* pour les groupes hyperboliques, décrit au chapitre 6.)

Pour la description d'un exemple moins immédiat mais néanmoins accessible au non-spécialiste, qui est une solution du problème du mot pour un *groupe de présentation finie résiduellement fini*, nous renvoyons le lecteur au théorème 2.2.5 de [Robi-96].

La démonstration de l'existence de groupes de présentation finie à problème du mot non résoluble se divise en deux étapes.

- (SG) Il existe un semi-groupe de présentation finie à problème du mot non résoluble. C'est un résultat obtenu indépendamment par A.A. Markov¹² et Emil Post (1947) ; sa démonstration utilise l'existence dans $\mathbf{N}$ d'un sous-ensemble "récurivement énumérable mais non énumérable", existence qu'on montre en utilisant entre autres la théorie des *machines de Turing* et une variante de l'argument diagonal de Cantor (pour montrer que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable).
- (G) Réduction du cas des groupes au cas des semi-groupes. Il s'agit de montrer qu'il existe un groupe G tel que, si son problème du mot était résoluble, alors le problème du mot serait aussi résoluble pour un semi-groupe à la Markov-Post, ce qui n'est pas vrai par (SG). Cette étape, due (autant que je sache indépendamment) à P.S. Novikov, W.W. Boone et J.L. Britton, date de la fin des années 1950, et a été notablement simplifiée depuis, notamment grâce à un usage important de la notion d'extension HNN.

Citons un résultat marquant, qui est une caractérisation algébrique de la solubilité du problème des mots.

Théorème de Boone-Higman (1974). *Un groupe de type fini a un problème du mot résoluble si et seulement s'il est isomorphe à un sous-groupe d'un sous-groupe simple d'un groupe de présentation finie.*

Pour une exposition de ce qui précède, voir le chapitre 12 de [Rotm-95].

¹²Il s'agit de Andrei Andreyevich Markov (1903-1979), fils de Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), dont le directeur de thèse (1884) était Pafnuty Lvovich Chebyshev. Les "chaînes de Markov" portent le nom du père.

* * * * *

Au début des années 1930, Magnus a montré que le problème du mot est résoluble pour les groupes à un relateur ; c’est une conséquence du “Freiheitssatz” (voir le chapitre II.5 de [ChMa–82]).

Le problème du mot pour les groupes de nœud est résoluble : c’est un (cas particulier d’un) résultat de Waldhausen [Wald–68] ; en fait, depuis les travaux de Perelman établissant la conjecture de géométrisation de Thurston, on sait que cela vaut pour tous les groupe fondamentaux des 3-variétés (voir le chapitre 12 de [Ep+5–92] et la discussion autour du théorème 3.3.1 de [Brid–02]). Mieux, la croissance de la fonction de Dehn d’un tel groupe est au plus exponentielle [Brid–93]. Le problème de conjugaison pour les groupes fondamentaux de 3-variétés est résoluble : voir [Prea–06] et [Prea].

Le problème du mot pour les groupes linéaires de type fini est résoluble. Le problème de conjugaison pour les groupes linéaires de présentation finie est résoluble. Voir les théorèmes 5.1 et 5.3 de [Mill–92]. Pour un groupe de type fini résiduellement fini, le problème du mot est résoluble dans le cas de présentation finie, mais pas en général [Mesk–74].

Il y a de bonnes raisons d’étudier le problème du mot pour certains groupes qui ne sont pas de type fini ; noter qu’un mot en un système (infini) S de générateurs d’un groupe G est toujours dans un sous-groupe de type fini de G . Par exemple, Lyndon a montré que le problème du mot est résoluble dans “son” groupe $F^{\mathbb{Z}[x]}$, qui est un groupe tel que ses sous-groupes de type fini sont exactement les “groupes limites” de Sela [Lynd–60].

Le problème d’isomorphisme est résoluble pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov ([Sela–95], [DaGu]).

4. DIAGRAMMES ET GRAPHS DE CAYLEY, DEHN’S GRUPPENBILDER

Soit $G = \langle S \rangle$ un groupe donné avec un ensemble fini de générateurs $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Le *diagramme de Cayley* ou “*Dehn Gruppenbild*” associé est le graphe orienté $\mathcal{C}(G, S)$ ayant G pour ensemble de sommets, et dans lequel il y a une arête orientée de g à h et étiquetée par s lorsque $g^{-1}h = s \in S \cup S^{-1}$. Relevons les points suivants.

- Dans $\mathcal{C}(G, S)$, avec toute arête de g vers h étiquetée par s , on trouve une arête de h vers g étiquetée par s^{-1} . Toutefois, dans les dessins, on ne représente souvent qu’une des deux arêtes d’une même paire, celle dont l’étiquette s est dans S ; de plus, dans le cas spécial où $s^2 = 1$ dans G , on omet souvent d’indiquer l’orientation.

- Il peut exister plusieurs arêtes de g vers h , d'étiquettes différentes. En effet, il faut comprendre que S n'est pas dans G , mais est une base d'un groupe libre F donné avec une surjection $\pi : F \longrightarrow G$, et on ne sait pas a priori si la restriction de π à S est injective. De même, s'il existe $s \in S$ tel que $\pi(s) = 1$, il y a des boucles aux sommets de $\mathcal{C}(G, S)$.
- Exemple d'une présentation dont le diagramme de Cayley contient des arêtes multiples et des boucles :

$$\mathbf{Z} = \langle s, t, u \mid s = t, u = 1 \rangle.$$

- Le groupe G opère sur $\mathcal{C}(G, S)$ par automorphismes de graphe dirigé étiqueté ; un générateur s applique un sommet g sur l'extrémité gs de l'arête d'origine g et d'étiquette s . Cette action est simplement transitive.

Dans ce texte, nous conviendrons d'appeler *graphe de Cayley* le graphe géométrique associé au diagramme de Cayley, c'est-à-dire le graphe obtenu en oubliant les orientations et les étiquettes, et en remplaçant chaque couple $((g, gs), (gs, (gs)s^{-1}))$ d'arêtes orientées par une seule arête $\{g, gs\}$.

Autre point de vue : le graphe de Cayley est un espace métrique dénombrable qui est connexe par pas de longueur 1.

4.1. Un diagramme de Cayley d'un groupe d'isométries propres du plan hyperbolique. Le premier exemple donnant lieu à une figure dans [Dehn–10] est celui associé à la présentation

$$\langle s_1, s_2 \mid (s_1)^3, (s_2)^5, (s_1 s_2)^2 \rangle$$

du groupe alterné A_5 d'ordre 60. Les notes [Dehn–a] contiennent d'autres exemples, dans l'ordre : les groupes symétriques Σ_3 et Σ_4 , les groupes alternés A_4, A_5 , le groupe $A_5 \times \{1, -1\}$ des isométries laissant invariant un icosaèdre régulier, et le groupe symétrique

$$\Sigma_5 = \left\langle s_1, s_2, s_3 \mid \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^5 = (s_1 s_2)^2 = 1 \\ s_3^2 = 1, \quad s_3^{-1} s_1 s_3 = s_1, \quad s_3^{-1} s_2 s_3 = s_2 \end{array} \right\rangle.$$

Dehn remarque que $s_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 3)$ et $s_3 = (1\ 2)$ suffisent à engendrer Σ_5 , et que celui-ci est un quotient du groupe

$$(P_{5,4}) \quad G = \langle s_2, s_3 \mid (s_2)^5, (s_3)^2, (s_3 s_2)^4 \rangle.$$

Par un argument géométrique, il montre que G est un groupe infini, dont le graphe de Cayley relativement à $\{s_2, s_3\}$ est le 1-squelette d'un pavage du plan hyperbolique par des pentagones et des octogones

réguliers, avec un pentagone et deux octogones incidents à chaque sommet. Nous comprenons l'argument de Dehn en le reformulant comme suit.

Considérons dans $\mathcal{H}^2$ un triangle isocèle T ayant un sommet A d'angle $2\pi/5$ et deux sommets B, C d'angle $2\pi/8$. Soient s_2 une rotation de centre A et d'angle $2\pi/5$, et s_3 un demi tour centré au milieu du segment BC . Il résulte d'un théorème de Poincaré sur les polygones générateurs des groupes fuchsien que le groupe d'isométries de $\mathcal{H}^2$ engendré par s_2 et s_3 d'une part a T pour domaine fondamental et d'autre part a la présentation $(P_{5,4})$. (Pour le théorème de Poincaré, que Dehn n'invoque pas explicitement, voir [Poin–82], ou l'exposition de [Iver–92].) Le graphe de Cayley correspondant est le graphe dual du pavage $(gT)_{g \in G}$ de $\mathcal{H}^2$; autrement dit :

le graphe de Cayley associé à la présentation $(P_{5,4})$ est le 1-squelette d'un pavage de $\mathcal{H}^2$ par des pentagones réguliers (centrés aux points de la forme gA) et des octogones réguliers (centrés aux points de la forme gB et gC) ; c'est un graphe trivalent.

Toujours dans [Dehn–a], Dehn ajoute que G s'insère dans la famille

$$(P_{\alpha,\beta}) \quad G_{\alpha,\beta} = \langle s_1, s_2 \mid (s_1)^\alpha, (s_2)^2, (s_2 s_1)^\beta \rangle,$$

où α et β sont deux entiers. Le groupe $G_{\alpha,\beta}$ est infini si

$$\frac{\alpha - 2}{\alpha} \pi + 2 \frac{2\beta - 2}{2\beta} \pi \geq 2\pi,$$

et les tuiles du pavage correspondant du plan hyperbolique sont alors des α -gones réguliers et des 2β -gones réguliers.

Ajoutons encore une remarque. Soient s'_3 une symétrie de $\mathcal{H}^2$ d'axe prolongeant le côté BC et G' le groupe d'isométries de $\mathcal{H}^2$ engendré par s_2 et s'_3 . Le théorème de Poincaré fournit la présentation

$$(P'_{5,4}) \quad G' = \langle s_2, s'_3 \mid (s_2)^5, (s'_3)^2, (s'_3 s_2^{-1} s'_3 s_2)^2 \rangle.$$

Comme T est également domaine fondamental pour l'action de G' sur $\mathcal{H}^2$, le graphe de Cayley de $(P'_{5,4})$ est isométrique à celui de $(P_{5,4})$. Notons que le groupe G' , dont la présentation $(P'_{5,4})$ montre immédiatement que son abélianisé est cyclique d'ordre 10, n'est pas isomorphe au groupe G , dont l'abélianisé est d'ordre 2.

4.2. Généralités sur les diagrammes de Cayley. Il est naturel de chercher des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un diagramme (graphe orienté et étiqueté) soit le diagramme de Cayley associé à une présentation de groupe. Avant de formuler un énoncé, rappelons ceci.

Considérons un *diagramme régulier*¹³, c'est à dire un graphe orienté, étiqueté par un ensemble de la forme $\{s_1, s_1^{-1}, \dots, s_n, s_n^{-1}\}$, chaque sommet étant incident à exactement une arête entrante étiquetée s_i^{-1} et une arête sortante étiquetée s_i , pour $i = 1, \dots, n$, et chaque arête étiquetée s_i d'un sommet x vers un sommet y étant appariée à une arête étiquetée s_i^{-1} du sommet y vers le sommet x . (A ceci près que, si $s_i^2 =_G 1$, chaque arête étiquetée s_i de x vers y est appariée à une arête étiquetée s_i de y vers x .) Etant donné un tel diagramme, on associe naturellement à tout chemin dans ce graphe un mot en les s_i et leurs inverses. Le diagramme est alors *homogène* si, pour tout couple de chemins d'origines différentes et de même mot associé, les chemins sont en même temps fermés ou non.

Exemples de diagrammes réguliers non homogènes. (i) Soit D un diagramme à trois sommets x, y, z avec une boucle étiquetée s_1 en x , une arête étiquetée s_2 de x vers y et une autre de y vers x , une arête étiquetée s_1 de y vers z et une autre de z vers y , et une boucle étiquetée s_2 en z (figure 4, page 62 de [MaKS–66]). Alors D est régulier, mais non homogène car le chemin d'étiquette s_1 issu de x est fermé et celui de même étiquette issu de y ne l'est pas.

(ii) Soit P le graphe de Petersen, qu'on peut définir comme le graphe dont les sommets sont les sous-ensembles à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, avec une arête entre $\{i, j\}$ et $\{k, \ell\}$ lorsque i, j, k, ℓ sont tous distincts. C'est un graphe régulier de degré trois, à dix sommets, de groupe de symétrie isomorphe au groupe symétrique Σ_5 . Si P était le graphe sous-jacent à un diagramme de Cayley $\mathcal{C}(G, S)$, l'ensemble générateur S contiendrait au moins un élément d'ordre 2 (pour obtenir un graphe de degré impair) ; mais ceci est impossible car tout élément d'ordre 2 du groupe de symétrie Σ_5 de P possède des sommets fixes.

Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ un diagramme connexe régulier, étiqueté par un ensemble de la forme $S = \{s_1, s_1^{-1}, \dots, s_n, s_n^{-1}\}$, et soit G son groupe d'automorphismes (en tant que graphe dirigé étiqueté).*

Alors $\mathcal{C}$ est un diagramme de Cayley si et seulement s'il est homogène.

Lorsque c'est le cas, c'est le diagramme de Cayley du groupe G relativement au système de générateurs S . En particulier, l'action de G sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{C}$ est simplement transitive.

¹³Attention : ce n'est pas l'usage du mot “régulier” à la page 62 de [MaKS–66], qui nous semble propices aux confusions avec la signification du mot pour les graphes. Nous préférons traduire le “regular” de Magnus-Karras-Solitar par “homogène”, voir ci-dessous.

Référence pour la démonstration : voir le théorème 1.6, page 63, ainsi que l'exercice 15, page 69, de [MaKS–66]. $\square$

Réciproquement, soit G un groupe donné par une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$ et soit $\mathcal{C}$ un diagramme connexe régulier, étiqueté par $S \cup S^{-1}$, homogène, et dans lequel tout chemin étiqueté par une relation de R est fermé. Alors $\mathcal{C}$ est le diagramme de Cayley d'un quotient de G mais, en général, pas de G lui-même. L'exemple le plus simple est sans doute celui d'un circuit de longueur n convenablement orienté et étiqueté, qui est le diagramme de Cayley d'un quotient fini $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \langle s \mid s^n \rangle$ du groupe cyclique infini $\mathbf{Z} = \langle s \mid \rangle$.

Pour pouvoir décider si $\mathcal{C}$ est vraiment le diagramme $\mathcal{C}(G, S)$, il faut par exemple connaître une forme normale des éléments de G dans leur écriture en termes des générateurs de S , ou encore avoir résolu le problème du mot pour G . Autrement dit :

*dessiner des parties arbitrairement grandes
du “Dehn Gruppenbild” de $G = \langle S \mid R \rangle$
équivalent à résoudre le problème du mot pour G .*

4.3. Quelques diagrammes pour les groupes cycliques et certains de leurs produits libres. Ce numéro est un “exercice d'échauffement” en vue du numéro 4.5.

Considérons le groupe $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels engendré par $\{1, k\}$, avec $k \geq 2$, et le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(\mathbf{Z}, \{1, k\})$ correspondant.

Si $k = 2$, ce diagramme est une échelle infinie, avec les entiers pairs sur un montant infini aux altitudes $\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$, les entiers impairs sur l'autre montant infini aux altitudes $\dots, -3, -1, 1, 3, \dots$, tous les segments de ces montants dirigés vers le haut et étiquetés par 2, et des échelons obliques liant n à $n + 1$ étiquetés par 1. Le dessin obtenu est la figure 11 de [Dehn–10].

Si $k = 3$, le diagramme peut être décrit comme un prisme triangulaire, avec trois montants infinis contenant les sommets qui correspondent aux entiers congrus à 0, 1, 2 respectivement, et une spirale montante linéaire par morceaux, chaque morceau connectant un entier n sur l'un des montants à l'entier $n + 1$ sur le prochain montant.

De même, pour tout $k \geq 3$, le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(\mathbf{Z}, \{1, k\})$ peut être vu comme un prisme infini sur un k -gone régulier avec une spirale linéaire par morceaux.

En recollant deux sections k -gonales convenables d'un tel diagramme, on obtient le diagramme de Cayley d'un quotient fini $\mathcal{C}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \{1, k\})$, qui est naturellement plongé dans la surface d'un anneau ou d'un ruban de Möbius lorsque $k = 2$, ou dans la surface d'un tore lorsque $k \geq 3$.

Considérons ensuite deux entiers $k, \ell \geq 2$, un groupe cyclique C_k d'ordre k engendré par un générateur μ , un groupe cyclique C_ℓ d'ordre ℓ engendré par un générateur ν , et leur produit libre $C_k * C_\ell$ engendré par $\{\mu, \nu\}$.

Le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ peut être dessiné comme suit, par couches : la première couche est un k -gone régulier, dont les sommets correspondent aux éléments $\mu^m, m = 0, 1, \dots, k-1$, du groupe $C_k * C_\ell$; la seconde couche est une couronne de ℓ -gones réguliers, au nombre de k , chacun ayant exactement un sommet commun avec le k -gone de la couche précédente ; la couche suivante est une couronne de k -gones réguliers, au nombre de $k(\ell - 1)$, chacun ayant exactement un sommet commun avec un ℓ -gone de la couche précédente ; etc. (On convient qu'un 2-gone régulier est un segment.)

“Vu d'assez loin”, $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ se rapproche d'un arbre biparti ayant alternativement des sommets de degré k et des sommets de degré ℓ . En termes plus techniques, $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ est quasi-isométrique à un tel arbre.

4.4. Le diagramme de [Dehn–10] pour le groupe du nœud de trèfle. Soient K un nœud de trèfle et G son groupe. L'un des diagrammes usuels représentant K fournit la présentation de Dehn

$$(P_1) \quad G = \langle a, b, c, d \mid ad^{-1}b = bd^{-1}c = cd^{-1}a = 1 \rangle,$$

apparaissant au § 5 du chapitre II de [Dehn–10]. La présentation (P_1) de G ayant 4 générateurs dont aucun n'est d'ordre 2 dans G , le graphe de Cayley $\mathcal{C}(G, \{a, b, c, d\})$ est régulier de degré 8 ; décrivons-le.

Soit d'abord L l'échelle obtenue à partir du graphe $\mathcal{C}(\mathbf{Z}, \{1, 2\})$ du numéro précédent en étiquetant toutes les arêtes verticales des deux montants infinis par d et les arêtes obliques montantes du zig-zag médian par une suite périodique $\dots, c, b, a, c, b, a, \dots$ (la lettre L se réfère à “Leiter = échelle”). Soit par ailleurs B l'arbre trivalent régulier (la lettre B se réfère à “Baum = arbre”). Alors

le diagramme $\mathcal{C}(G, \{a, b, c, d\})$ de la présentation (P_1) est la réunion d'une famille $(L_e)_{e \in E(B)}$ de copies de L indexée par l'ensemble $E(B)$ des arêtes géométriques de B , chaque copie de L étant recollée à deux autres copies sur chacun des montants verticaux (donc à quatre autres copies en tout), de telle sorte que chaque sommet du graphe résultant soit incident à quatre arêtes entrantes, d'étiquettes a, b, c, d , et quatre arêtes sortantes, d'étiquettes a, b, c, d .

Comme déjà dit, il convient de ne pas dessiner les arêtes étiquetées par l'une des lettres $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}$.

Le diagramme ainsi décrit est a priori le diagramme de Cayley d'un quotient (sic !) de G . Pour montrer que c'est vraiment le diagramme de Cayley de G , il faut se convaincre que tout chemin fermé dans ce graphe peut être homotopé à un chemin constant via des "homotopies élémentaires", chacune correspondant à un triangle associé à l'une des relations de la présentation (P_1) ; le fait que le diagramme "se projette" sur l'arbre B joue un rôle important dans l'argument Voir [Dehn-10], page 117 de [DeSt-87], complété par [Dehn-11], pages 173-174 de [DeSt-87].

4.5. Des diagrammes de Cayley pour les groupes des nœuds toriques. Nous allons décrire une autre présentation de G et son diagramme de Cayley. La présentation (P_1) peut s'écrire

$$(P'_1) \quad G = \langle a, b, c, d \mid ba = cb = ac = d \rangle,$$

de sorte qu'on a aussi

$$(P_2) \quad G = \langle a, b, c \mid ba = cb = ac \rangle,$$

qui est d'ailleurs une présentation de Wirtinger de G , et encore

$$(P_3) \quad G = \langle a, b \mid bab = aba \rangle,$$

montrant que G est isomorphe au "groupe d'Artin des tresses à trois brins". En posant $v = bab$, on trouve $G = \langle d, v \mid d^3 = v^2 \rangle$, ou encore

$$(P_4) \quad G = \langle t, u, v \mid t = u^3 = v^2 \rangle.$$

Cette dernière présentation montre que G s'insère dans une suite exacte de la forme

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z} = \langle t \rangle \longrightarrow G = \langle t, u, v \rangle \xrightarrow{\pi} C_3 * C_2 \longrightarrow 1,$$

où $\mathbf{Z} = \langle t \rangle$ désigne le centre de G , engendré par t , et où $C_3 * C_2$ désigne comme plus haut le produit libre d'un groupe cyclique d'ordre 3, engendré par la classe de u modulo le centre de G , et d'un groupe cyclique d'ordre 2, engendré par celle de v .

Les éléments de $C_3 * C_2 = \langle \mu, \nu \mid \mu^3 = \nu^2 = 1 \rangle$ sont en bijection avec les mots de la forme

$$\mu^{\epsilon_0} \nu \mu^{\epsilon_1} \nu \mu^{\epsilon_2} \dots \nu \mu^{\epsilon_n}$$

où $n \geq 0$, $\epsilon_0, \epsilon_n \in \{0, 1, 2\}$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1} \in \{1, 2\}$. Il en résulte que les éléments de G sont en bijection avec les mots de la forme

$$(N) \quad t^k u^{\epsilon_0} v u^{\epsilon_1} v u^{\epsilon_2} \dots v u^{\epsilon_n}$$

où $k \in \mathbf{Z}$ et $n, \epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ comme ci-dessus. Le diagramme de Cayley $\mathcal{C}(G, \{t, u, v\})$ se projette donc naturellement sur le diagramme $\mathcal{C}(C_3 * C_2, \{\mu, \nu\})$ décrit selon ses couches au numéro précédent.

On peut d'ailleurs généraliser sans peine au cas de deux entiers $k, \ell \geq 2$ et du groupe

$$(P_{k,\ell}) \quad G_{k,\ell} = \langle t, u, v \mid t = u^k = v^\ell \rangle;$$

lorsque de plus k et ℓ sont premiers entre eux, $G_{k,\ell}$ est le groupe d'un *nœud du tore*. Le diagramme $\mathcal{C}(G_{k,\ell}, \{t, u, v\})$ peut être décrit comme suit : au-dessus de la première couche du diagramme de $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$ décrit en seconde partie du numéro 4.3, un prisme infini sur un k -gone régulier comme en première partie du numéro 4.3 ; au-dessus de la seconde couche de $\mathcal{C}(C_k * C_\ell, \{\mu, \nu\})$, on colle le long de chaque arête du premier prisme un prisme infini sur un ℓ -gone régulier ; etc.

Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que le diagramme ainsi obtenu est quasi-isométrique au produit de l'arbre biparti de degrés k, ℓ mentionné en fin de 4.3 et d'une droite. De plus, tous ces diagrammes (à la seule exception de celui correspondant à $k = \ell = 2$) sont quasi-isométriques entre eux

4^{bis}. INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES DE HOPF À GROMOV

L'avantage de représenter un groupe G par un diagramme de Cayley ou un graphe de Cayley, c'est-à-dire par un objet géométrique, est de pouvoir définir pour G des *invariants géométriques*. Ainsi, on peut voir le *nombre de bouts* du graphe de Cayley d'un groupe de type fini comme un invariant géométrique du groupe lui-même (travaux de Hopf, et de ses étudiants Freudenthal et Specker dans les années 1940).

Ces invariants géométriques jouent un rôle prépondérant en théorie des groupes depuis les travaux de Gromov, dont les très influents [Grom-87] et [Grom-93].

5. SPHÈRES D'HOMOLOGIE

Soit K un nœud, orienté, donné par un diagramme plan $\mathcal{D}$. Les points de croisement divisent la projection de K en un certain nombre d'arcs, chacun héritant de l'orientation de K . Notons σ_1 l'un d'entre eux (arbitraire), et $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ les suivants dans l'ordre imposé par l'orientation de K ; notons $s_1, \dots, s_n$ les générateurs de Wirtinger correspondants de G_K . Choisissons s_1 comme méridien de $\partial E(K)$. Nous allons décrire une recette fournissant le parallèle correspondant.

En parcourant D à partir du milieu de σ_1 , on passe par n points de croisement où le nœud passe en-dessous d'un arc. Notons, dans l'ordre, $P_1, \dots, P_n$ ces points ; notons σ_{i_j} l'arc qui passe par dessus en P_j ; posons $\epsilon_j = 1$ [respectivement $\epsilon_j = -1$] si σ_{i_j} passe par dessus de

gauche à droite [resp. de droite à gauche]. Alors le parallèle cherché s'écrit

$$p = s_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdots s_{i_n}^{\epsilon_{i_n}}(s_1)^k$$

où k est tel que p soit homologiquement trivial dans $H_1(E(K))$, c'est-à-dire tel que $\epsilon_{i_1} + \cdots + \epsilon_{i_n} + k = 0$.

Pour une projection convenable du nœud de trèfle K , on trouve

$$(P'_2) \quad G_K = \langle a, b, c \mid ab = bc = ca \rangle$$

et

$$m = a, \quad p = c^{-1}a^{-1}b^{-1}a^3.$$

Si $d = ab = bc = ca$ comme¹⁴ plus haut, notons que $b = a^{-1}d$, $c = da^{-1}$, et $ada = abca = d^2$, de sorte que

$$(P_5) \quad G_K = \langle a, d \mid ada = d^2 \rangle$$

et

$$p = c^{-1}a^{-1}b^{-1}a^3 = (ad^{-1})a^{-1}(d^{-1}a)a^3 = ad^{-3}a^5 = d^{-3}a^6$$

(car d^3 est central dans G_K).

Soit T' un tore solide. Choisissons un méridien m' et un parallèle p' sur $\partial T'$; notons que $m' = 1 \in \pi_1(T')$ et que p' engendre $\pi_1(T')$. Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, soit $h_k : \partial T' \rightarrow \partial V(K)$ un homéomorphisme tel que $h_k(m') = ap^{-k}$ [= mp^{-k}] et $h_k(p') = p$ (un tel homéomorphisme est bien défini à isotopie près). Posons

$$M_k = E(K) \cup_{h_k} T',$$

qui est une 3-variété compacte connexe orientable.

Comme d^3 est central, ap^{-k} s'écrit aussi $d^{3k}a^{1-6k}$. Le théorème de Seifert-van Kampen¹⁵ montre que le groupe fondamental de M_k est isomorphe au produit libre de G_K et $\pi_1(T') = \langle p' \rangle$ avec amalgamation donnée par h_k , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \pi_1(M_k) &= \langle a, d, p' \mid ada = d^2, ap^{-k} = 1, p = p' \rangle \\ &= \langle a, d \mid ada = d^2, d^{3k} = a^{6k-1} \rangle. \end{aligned}$$

Notons que ce groupe est parfait ; en effet, si $\equiv$ désigne une égalité dans $\pi_1(M_k)$ modulo les commutateurs, nous avons d'abord

$$d = d^2d^{-1} = adad^{-1} = a^2(a^{-1}dad^{-1}) \equiv a^2,$$

¹⁴A l'échange près de a et b .

¹⁵L'article de Seifert date de 1931 et celui de van Kampen de 1933. Ce dernier était une commande de Zariski, qui voulait une méthode simple pour analyser le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe algébrique dans le plan projectif complexe. Pour la détermination de groupes fondamentaux avant ce théorème "de Seifert – van Kampen", et notamment chez Poincaré, voir le n° 4.1 de [Stil-93].

donc $d^{3k} \equiv a^{6k} = d^{3k}a$ et $a \equiv 1$, et ensuite $d \equiv ada = d^2$, donc $d \equiv 1$.

On obtient le résultat suivant. Voir [Dehn–10], pages 117–121 de [DeSt–87], ainsi que les pages 67–74 de [Rham–69] ; voir aussi le numéro 8.4 de [Stil–93].

Théorème sur les sphères d’homologie. *Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, la variété M_k est une sphère d’homologie. De plus*

- pour $k = 0$, c’est la sphère usuelle ;
- pour $k = 1$, le groupe $\pi_1(M_1)$ est le groupe binaire de l’icosaèdre, qui est un groupe parfait à 120 éléments ;
- pour $k \neq 0, 1$, le groupe $\pi_1(M_k)$ est infini ;
- pour k et k' distincts dans $\mathbf{Z}$, les groupes $\pi_1(M_k)$ et $\pi_1(M_{k'})$ sont non isomorphes.

Déjà dans une courte note [Dehn–07] précédant [Dehn–10], Dehn avait construit des sphères d’homologie, par une méthode différente. Etant donné deux nœuds K et K' dans $\mathbf{S}^3$, soit M la variété obtenue à partir des extérieurs $E(K)$ et $E(K')$ en recollant leurs bords, avec un méridien m de $\partial E(K)$ identifié à un parallèle p' de $\partial E(K')$, et de même p identifié à m' . Alors M est une sphère d’homologie ; de plus, si K et K' sont non triviaux, $\mathbf{Z}^2$ s’injecte dans le produit amalgamé $\pi_1(M) = \pi_1(K) *_{\pi_1(\mathbf{T}^2)} \pi_1(K')$, qui est donc un groupe infini.

Ce type de construction, consistant à ôter certains parties toriques d’une variété pour les recoller différemment, est la première apparition de *chirurgies* en topologie. Pour un état de la question relatif aux nœuds 90 ans plus tard, voir [Boye–02].

5^{bis}. A PROPOS DE SPHÈRES D’HOMOLOGIE

Les sphères d’homologie jouent un rôle important en topologie ; voir [Save–02]. Evoquons quelques points de l’histoire postérieure à Dehn, comme suit.

Toute 3-variété orientée M est le bord d’une 4-variété Q , comme l’ont noté indépendamment Thom [Thom–51] et Rochlin [Roch–51] ; on peut supposer de plus que Q est simplement connexe et possède une structure spin. Le groupe $H_2(Q, \mathbf{Z})$ est sans torsion (parce que $\pi_1(Q) = 1$) ; la forme d’intersection

$$H_2(Q, \mathbf{Z}) \times H_2(Q, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

est unimodulaire (parce que M est une sphère d’homologie) et paire (parce que Q a une structure spin). Cette forme a une signature qui est un multiple de 8 (c’est une propriété arithmétique des formes unimodulaires paires), dont la classe modulo 16 ne dépend que de M et

pas du choix de Q (c'est un résultat topologique profond de Rochlin). On obtient donc un *invariant de Rochlin* $\mu(M) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ des sphères d'homologie entière (qui n'est qu'une toute petite partie d'une histoire aux multiples facettes dévoilée par Rochlin, voir [GuMa-86].)

Cet invariant s'est révélé plus tard être la réduction modulo 2 d'un *invariant de Casson*, à valeurs dans $\mathbf{Z}$.

Si un groupe G est le groupe fondamental d'une n -sphère d'homologie, avec $n \geq 3$, alors G est de présentation finie, parfait, et $H_2(G; \mathbf{Z}) = 0$. Lorsque $n \geq 5$, réciproquement, tout groupe ayant ces trois propriétés est groupe fondamental d'une n -sphère d'homologie [Kerv-69]. Lorsque $n = 4$ ou $n = 3$, on ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes.

Citons encore un autre résultat de Kervaire :

le seul groupe fini non trivial qui est groupe fondamental d'une 3-sphère d'homologie est le groupe binaire de l'icosaèdre, à 120 éléments ;

ainsi qu'une conséquence des travaux de Perelman :

une 3-sphère d'homologie à groupe fondamental fini non trivial est difféomorphe au quotient de $SU(2)$ par le groupe binaire de l'icosaèdre.

6. ALGORITHME(S) DE DEHN

Soit $\langle S \mid R \rangle$ une présentation finie d'un groupe G . Notons R_* l'ensemble des relations obtenues à partir de celle de R par permutations cycliques et inversion. Soit w un mot en les lettres de $S \cup S^{-1}$; notons $|w|$ la *longueur* de w , c'est-à-dire le nombre de ses lettres.

Une présentation finie $\langle S \mid R \rangle$ d'un groupe G est une *présentation de Dehn* si elle satisfait la condition suivante : toute relation $r = 1$ dans R_* peut s'écrire sous la forme $r \equiv u_r v_r^{-1}$, c'est-à-dire $u_r = v_r$, où u_r et v_r sont des mots en les s_j et leurs inverses tels que $|v_r| < |u_r|$.

C'est par exemple le cas de la présentation usuelle du groupe fondamental d'une surface close orientable de genre 2

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle s_1, \dots, s_4 \mid s_1 s_2 s_1^{-1} = s_4 s_3 s_4^{-1} s_3^{-1} s_2 \rangle.$$

(Pour cette présentation, $|R| = 1$ et $|R_*| = 16$.)

Pour une présentation de Dehn, *l'algorithme de Dehn* pour le problème du mot fonctionne comme suit : étant donné un mot w en les s_j , s'il contient une paire de lettres consécutives de la forme ss^{-1} , on la supprime, et s'il contient un u_r , on obtient un nouveau mot plus court en remplaçant u_r par v_r ; on répète l'opération tant qu'elle est possible (en choisissant arbitrairement la paire ss^{-1} à supprimer ou le u_r à

remplacer s'il y a plusieurs possibilités) ; le mot w représente 1 ou non selon que le procédé s'arrête avec le mot vide ou avec un mot non vide.

Dehn a montré que les présentations usuelles des groupes fondamentaux de surfaces sont des “présentations de Dehn” de sorte que le problème du mot est résoluble pour ces groupes. De plus, dans un tel groupe, chaque élément donné comme produit des générateurs peut être algorithmiquement transformé en une “forme normale”, de sorte que le problème de conjugaison est aussi résoluble. Dans un premier article [Dehn–11], Dehn établit ces résultats en utilisant les propriétés géométriques (courbure négative) du plan hyperbolique, qui est le revêtement universel d'une surface de genre $g \geq 2$; dans un second article [Dehn–12], il utilise de manière essentielle la combinatoire des chemins fermés dans le diagramme de Cayley. Dehn insiste sur la signification géométrique de ses résultats, pour deux courbes c, c' sur une surface Σ de groupe fondamental $G = \pi_1(\Sigma)$:

- (WP) la résolubilité du problème du mot pour G équivaut à l'existence d'un algorithme permettant de décider si c est homotope à un lacet constant ;
- (CP) la résolubilité du problème de conjugaison pour G équivaut à l'existence d'un algorithme permettant de décider si c et c' sont librement homotopes.

Ces articles ont marqué toute la suite du sujet, dont les méthodes diagrammatiques de van Kampen (1933), passées inaperçues à l'époque mais redécouvertes par Lyndon (1966), et par là toute la théorie de la petite simplification. La terminologie “algorithme de Dehn”, due à Magnus, apparaît dans la thèse de son étudiant Martin Greendlinger (1960), où il est montré que l'algorithme fonctionne pour des présentations satisfaisant à des conditions convenables de petite simplification (selon la page 21 de [ChMa–82]).

Gromov a montré qu'un groupe possède une présentation de Dehn si et seulement s'il est hyperbolique, au sens de [Grom–87]. Voir par exemple [BrHa–99], théorème III.Γ.2.6, page 450 (où il conviendrait d'introduire R_*). De plus, pour tout groupe hyperbolique au sens de Gromov, le problème de conjugaison est résoluble ([BrHa–99], page 451) et le problème d'isomorphisme est résoluble ([Sela–95] avec hypothèses supplémentaires, [DaGu] en général).

6^{bis}. FONCTIONS DE DEHN

Soit $\langle S \mid R \rangle$ une présentation finie d'un groupe G . Soit w un mot en les lettres de $S \cup S^{-1}$ qui représente l'élément neutre de G , ce qu'on écrit $w =_G 1$; il existe donc des relations $r_i \in R_*$ et des mots v_i , tels

que $w = \prod_{i=1}^N v_i r_i v_i^{-1}$. Par définition, *l'aire* de w est le minimum $A(w)$ des entiers N pour lesquels une telle écriture est possible. La *fonction de Dehn* $\delta : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ est définie par

$$\delta(n) = \max \{A(w) \mid w =_G 1 \text{ et } |w| \leq n\}.$$

A priori, δ dépend de la présentation donnée ; toutefois, on montre facilement que, si deux présentations finies d'un même groupe donnent lieu à des fonctions δ_1 et δ_2 , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\delta_i(n) \leq C\delta_j(Cn + C) + Cn + C \quad \text{pour tout } n \geq 0 \text{ } (\{i, j\} = \{1, 2\}).$$

Dans ce sens, la fonction de Dehn ne dépend à équivalence près que du groupe de présentation finie G , et pas de la présentation finie choisie. Les fonctions de Dehn permettent de quantifier le degré de solubilité du problème du mot pour un groupe de présentation finie :

- un groupe a un problème du mot résoluble si et seulement si sa fonction de Dehn est réursive ;
- un groupe a une fonction de Dehn linéaire si et seulement s'il est hyperbolique au sens de Gromov [Grom-87] ;
- si IP désigne l'ensemble des nombre réels positifs $\rho \geq 1$ tels qu'il existe un groupe de présentation finie dont la fonction de Dehn est équivalente à $n \longmapsto n^\rho$ (avec "IP" pour "Isoperimetric Spectrum"), alors l'adhérence de IP est égale à $\{1\} \cup [2, \infty[$;
- il existe un groupe à un relateur, donc à problème du mot résoluble (c'est un résultat de Magnus), dont la fonction de Dehn est donnée à équivalence près par $\delta(n) = \epsilon_n(n)$, où les fonctions ϵ_n sont définies récursivement par

$$\epsilon_0(k) = k, \quad \epsilon_1(k) = 2^k, \quad \dots, \quad \epsilon_n(k) = 2^{\epsilon_{n-1}(k)}, \quad \dots$$

(de sorte que δ croît plus vite que toute exponentielle itérée) ;

pour tous ces résultats, voir l'exposition de [Brid-02]. On comprend aussi presque quelles sont les fonctions $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ qui sont (à équivalence près) des fonctions de Dehn : voir [SaBR-02] et [BORS-02].

7. GROUPES DE PRÉSENTATION FINIE, 2-COMPLEXES, 3- ET 4-VARIÉTÉS

Avant de mentionner d'autres résultats de Dehn, citons une observation de l'introduction de [Dehn-11] : un groupe de présentation finie peut avoir des sous-groupes qui ne sont pas de type fini. L'exemple de Dehn, celui d'un groupe libre à deux générateurs s_1, s_2 et du sous-groupe normal engendré par s_1 , est "évident" si on pense en termes de revêtements. Selon [Magn-78] (page 138), Dehn fut le premier à consigner cette observation.

Dehn savait aussi que

- (*) *tout groupe de présentation finie est groupe fondamental d'un 2-complexe, et aussi d'une variété compacte orientable de dimension quatre ;*

voir le § 2 du chapitre I de [Dehn–10] et le début du chapitre III de [Dehn–11]. Voici, en termes d'*aujourd'hui*, les pas d'une démonstration de (*) inspirée des articles de Dehn.

(i) A toute présentation finie d'un groupe G correspond un 2-complexe fini C tel que $\pi_1(C) = G$. Ce complexe a une seule 0-cellule, ses 1-cellules sont en bijection avec les générateurs de la présentation, et ses 2-cellules, en bijection avec les relations, sont attachées au 1-squelette conformément aux relations. Une subdivision ad hoc permet de considérer ce CW-complexe comme un complexe simplicial fini.

(ii) Un 2-complexe simplicial fini se plonge dans $\mathbf{R}^5$, ce dont on s'assure facilement par un argument de position générale : en dimension 5, deux plans affines peuvent toujours être rendus disjoints par un déplacement arbitrairement petit de l'un d'eux.

(iii) C possède un *voisinage ouvert régulier* V dans $\mathbf{R}^5$, dont C est un rétracte par déformation, de sorte que $\pi_1(C) \approx \pi_1(V) \approx \pi_1(\bar{V})$. Comme on peut munir $\mathbf{R}^5$ d'une structure de complexe simplicial dont C soit un sous-complexe, ceci est un cas particulier du résultat général élémentaire suivant : si L est un sous-complexe d'un complexe simplicial K , et si $V(L)$ désigne la réunion des intérieurs des simplexes de K contenant un sommet de L dans une subdivision barycentrique de L , alors $V(L)$ est un voisinage de K qui se rétracte par déformation sur L ; voir le no 9 du chapitre II dans [EiSt–52].

(iv) D'une part, comme C est de codimension trois dans $\bar{V}$, nous avons par position générale un isomorphisme $\pi_1(\bar{V}) \approx \pi_1(\bar{V} \setminus C)$. D'autre part, $\bar{V} \setminus C$ se rétracte par déformation sur le bord ∂V de V , qui est une sous-variété close de codimension 1 dans $\mathbf{R}^5$, en particulier une variété orientable de dimension 4. On a donc en fin de compte

$$G \approx \pi_1(C) \approx \pi_1(\partial V).$$

Autre argument pour (*). Soit M la somme connexe M de n copies de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^3$; son groupe fondamental est libre sur n générateurs $s_1, \dots, s_n$. Etant donné m relations $r_1, \dots, r_m$ en les s_j , on représente chaque r_i par un lacet dans M , ayant un voisinage tubulaire C_i homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^3$; noter que le bord de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^3$ est homéomorphe au bord de la variété simplement connexe et $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^2$. On modifie alors M “par chirurgie”, en remplaçant chaque C_i par une copie de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^2$.

Le groupe fondamental de la variété ainsi obtenue est isomorphe au groupe de présentation $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. Voir la page 187 de [SeTh–80].

Dehn ayant montré que tout groupe de présentation finie est groupe fondamental d’une 4-variété close, on peut se demander pourquoi la théorie combinatoire des groupes, qui est inséparable dès ses premiers débuts de la topologie de dimension trois, a pendant longtemps bien moins interagi avec l’étude des variétés de dimension ≥ 4 (exemples : les surfaces complexes !). Faute de discuter sérieusement la question, notons que ce n’est que dans les années 1920 que parut le livre de Lefschetz sur *l’analysis situs et la géométrie algébrique* [Lefs–24]. Lefschetz qui écrira plus tard que ce fut “son lot de planter le harpon de la topologie algébrique dans le corps de la baleine de la géométrie algébrique” (page 854 de [Lefs–68]).

8. ALLUSION À D’AUTRES CONTRIBUTIONS

Nous avons déjà fait allusion à

- (i) la solution de Dehn du 3e problème de Hilbert (au chapitre 1) ;
- (ii) sa démonstration du fait qu’il n’existe pas de déformation continue de $\mathbf{R}^3$ transformant un nœud de trèfle gauche en un nœud de trèfle droit, en d’autres termes du fait que le nœud de trèfle est “chiral” (au chapitre 2).

Sans entrer dans aucun détail, mentionnons tout de même encore :

- (iii) le théorème de Dehn-Nielsen concernant une surface close S , selon lequel tout automorphisme extérieur de $\pi_1(S)$ est induit par un homéomorphisme de S (~ 1921) ;
- (iv) le rôle des “twists de Dehn” dans l’étude des groupes de difféomorphismes et des groupes modulaires de surfaces [Dehn–38] ;
- (v) et les équations de Dehn-Sommerville, portant sur les nombres des faces de dimensions $0, 1, \dots, d$ d’une triangulation de la sphère de dimension d , équations conjecturées par Dehn (1905) et démontrées par Sommerville (1927).

9. QUELQUES SOUVENIRS ET COMMENTAIRES (SIEGEL, PENN, MAGNUS, STILLWELL, WEIL)

De Carl Ludwig Siegel [Sieg–64]

“J’apprends (...) quelle rare chance c’est que d’avoir des collègues académiques qui travaillent avec solidarité, sans égoïsme et sans l’idée d’une ambition personnelle, plutôt que d’émettre des directives venant de leurs positions hautaines.”

“Il avait un esprit philosophique au sens de Schiller et, comme il était épris de contradiction, une conversation avec lui menait souvent à une discussion fructueuse. Il s’intéressait beaucoup à l’histoire, ancienne et moderne (...).”

A propos du *Freiheitssatz* proposé comme sujet de thèse à Magnus, Siegel écrit aussi : “qu’il en découvrit une démonstration, et à l’occasion disait à ses amis comment elle allait”.

Du cinéaste Arthur Penn [Penn].

Penn était à Black Mountain en 1948.

“But then world events occurred, of a certain extraordinary character, which was that in Germany there was the rise of Hitler, and the creation of an enormous group of refugees who were some of the most remarkably talented people in all of Europe who were suddenly persona non grata, and forced out. And, although the United States had something of a welcoming policy, it was a peculiar period of, yeah we’ll let you come into the United States, but we won’t accept any of your credentials from Europe, because somehow that was just not the American way, so an awful lot of doctors for instance came in and had to take their medical exams over again. Psychoanalysts of world wide reputation had to go and sit for another medical exam. And we at Black Mountain were very fortunate in that people like Gropius and Albers, and Max Dehn who was a marvelous physicist and mathematician, came. So that a large part of our faculty population was made up of these absolutely extraordinary people who were able to make it to America, but couldn’t get a job at an American university. Although they’d been pillars of the Bauhaus in Germany, which was a remarkable place.”

Dernier alinéa de la préface du livre [MaKS–66].

“This book is dedicated to the memory of Max Dehn. We believe this to be more than an acknowledgment of a personal indebtedness by one of the authors who was Dehn’s student. The stimulating effect of Dehn’s ideas on presentation theory was propagated not only through his publications, but also through talks and personal contacts; it has been much greater than can be documented by his papers. Dehn pointed out the importance of fully invariant subgroups in 1923 in a talk (which was mimeographed and widely circulated but never published). His insistence on the importance of the word problem, which he formulated more than fifty years ago, has by now been vindicated beyond all expectations.”

De Wilhelm Magnus [Magn–78].

“We can also say that being a mathematician was an essential part of his personality and that it influenced also his very well founded and deep interests in the humanities, in art, and in nature.”

De John Stillwell [DeSt–87], page 253.

Extrait de l’introduction à la traduction de [Dehn–38], article qui reprenait et développait un exposé de 1922, au sujet des groupes modulaires de surfaces (= mapping class groups).

“Perhaps because of its very demanding proof, the result went unnoticed until it was rediscovered independently by Lickorish (1962).”

“Dehn had another idea which also went unnoticed, even when it was rediscovered in the unpublished, but famous, Thurston [Thur–76]. This was the idea of studying the mapping class group by its action on the space of simple curve systems.”

De André Weil [Weil–91], pages 52–53.

“J’ai rencontré deux hommes dans ma vie dont le souvenir me fait penser à Socrate ; ce sont Max Dehn et Brice Parain¹⁶. Ils avaient de Socrate, tel que nous l’imaginons d’après le témoignage de ses disciples, le rayonnement qui fait qu’on s’incline naturellement devant leur mémoire ; c’est là une qualité à la fois intellectuelle et morale que le mot de <<sagesse>> est peut-être le mieux fait pour exprimer, car la sainteté est autre chose. À côté du sage, le saint n’est peut-être qu’un spécialiste – un spécialiste de la sainteté ; le sage n’a pas de spécialité. Ceci n’est pas à dire, loin de là, que Dehn n’ait pas été un mathématicien de grand talent ; il a laissé une oeuvre de haute qualité. Mais pour un tel homme la vérité est une, et la mathématique n’est que l’un des miroirs où elle se reflète, avec plus de pureté peut-être que dans d’autres. Esprit universel, il avait une profonde connaissance de la philosophie et de la mathématique grecques.”

10. AUTOUR DE 1910 – FLORILÈGE

1907 *Les Demoiselles d’Avignon*, de Picasso ; titre original : El Burdel de Aviñón.

1907-1909 et 1916 Cours à Genève par Ferdinand de Saussure (1857-1913) et publication par ses élèves du *Cours de linguistique générale*.

¹⁶Philosophe et essayiste français, 1897–1971 ; ami d’Albert Camus ; apparaît dans “Vivre sa vie” de Jean-Luc Godard [Goda–62]. Je veux espérer que deux des phrases qu’il y prononce s’appliquent au présent texte : “Le mensonge c’est un des moyens de la recherche” et “Il faut passer par l’erreur pour arriver à la vérité”.

30 juin 1908 Chute d'une météorite géante à Tountouska, en Sibérie.

1908 Quatrième congrès international des mathématiciens, Rome. Dehn et sa femme y participent.

1908–1914 André Gide créateur et premier directeur de la *Nouvelle Revue française*.

1909 En juillet, un décret du cardinal Respighi, vicaire de Rome, interdit aux ecclésiastiques de la ville sainte la fréquentation du cinématographe, sous peine de suspension *a divinis*. (1913 Ouverture au Vatican du cinéma pontifical réservé aux membres du clergé.)

1909 Première traversée de la Manche en avion, le 25 juillet, par Louis Blériot.

Vers 1910 Travaux de Luitzen Egbertus Jan Brouwer en topologie, dont : *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*, Math. Ann. **70** (1911), 161–165 ; *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115 (degré de Brouwer, théorème du point fixe).

8 mars 1910 Création à Copenhague d'une "Journée de la femme" par une confédération internationale de femmes socialistes, en vue de faire admettre le vote des femmes. Vote acquis en 1893 en Nouvelle-Zélande, en 1918 en Allemagne, en 1944-45 en France, et en¹⁷ 1971 en Suisse (ce n'est même pas un record).

1910 *Premier quatuor à cordes* en la mineur de Béla Bartok, créé le 19 mars à Budapest.

1910 *Khodynka*, dernier écrit littéraire de Léon Tolstoï, mort le 7 novembre.

1910 *Aquarelle abstraite* de Vassily Kandinsky.

1910 Thèses de Erich Hecke et Richard Courant. Entre 1898 et 1915, il y eut 64 étudiants de Hilbert qui obtinrent leurs thèses, dont Dehn en 1900 ; et 10 autres après l'interruption de la guerre (d'après le "Mathematics Genealogy Project"). Pour comparaison : Selim Krein, 81 étudiants de thèse ; Andreï Kolmogorov, 79 étudiants ; Charles Ehresmann, 76 étudiants ; Wilhelm Magnus, 73 étudiants ; Beno Eckmann, 62 étudiants ; Heinz Hopf, 49 étudiants ; Henri Cartan, 14 étudiants ; etc, voir <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/extrema.php>

1910–1913 Créations parisiennes d'Igor Stravinski pour les ballets de Diaghilev : *L'oiseau de feu* le 25 juin 1910, *Petrouchka* le 13 juin 1911 et le *Sacre du Printemps* le 29 mai 1913.

1910–1913 *Principia Mathematica*, de Alfred North Whitehead et Bertrand Russell (trois volumes).

¹⁷Mais en 1957 dans la commune d'Unterbäch, en 1959 dans le canton de Vaud, et en 1990 dans le demi-canton d'Appenzell Rhodes-Intérieures, par décision du Tribunal fédéral.

1910 Fondation de la Société Mathématique suisse, après celles des London Mathematical Society (1865), Société Mathématique de France (1872), New York Mathematical Society (1888) devenue l'American Mathematical Society (1894), Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1890), et Österreichische Mathematische Gesellschaft (1903), et avant celles des Unione Matematica Italiana (1922) et European Mathematical Society (1990).

1911 Frictions franco-allemandes au Maroc, le “coup d'Agadir” le 1er juillet.

1911 Roald Amundsen atteint le pôle Sud, le 14 décembre, un mois avant Robert Falcon Scott (qui mourra dans une tempête au retour).

1912 Création le 16 octobre du *Pierrot lunaire*, Op. 18 d'Arnold Schönberg (oeuvre atonale, annonçant le dodécaphonisme).

1912 Naufrage du Titanic le 14 avril.

1912 Franz Kafka commence à rédiger *la Métamorphose*.

1912 Cinquième congrès international des mathématiciens, Cambridge (G.B.).

1913 Publication de *Du côté de chez Swann* de Marcel Proust, première partie de *À la recherche du temps perdu*.

1913 Dernière course de la diligence Aigle Les Diablerets, le 22 décembre ; mise en exploitation du chemin de fer électrique Aigle – Sépey – Diablerets.

1913 On compte 1370 automobiles à Genève.

1913 *Die Idee der Riemannschen Fläche*, de Hermann Weyl.

1914 Création du personnage de Charlot dans *Charlot vagabond*.

1914 *Les gens de Dublin* de James Joyce.

1914 *Grundzüge der Mengenlehre*, de Felix Hausdorff.

Quelques empereurs, rois et présidents autour de 1910

GUILLAUME II, dernier empereur allemand et dernier roi de Prusse de 1888 à 1918.

EDOUARD VII roi d'Angleterre de 1901 à 1910 ; GEORGES V de 1910 à 1936.

AIXINJUELIO PUYI, douzième et dernier empereur de la dynastie Qing de 1908 à 1912 ; SUN YAT-SEN président de la République de Chine en 1912.

Theodore ROOSEVELT, président républicain des Etats-Unis de 1901 à 1909 ; William H. TAFT, idem de 1901 à 1913 ; Thomas Woodrow WILSON, président démocrate de 1913 à 1921.

Armand FALLIÈRE président de la Troisième République Française de 1906 à 1913, Raymond POINCARÉ (Raymond, 1860–1934, cousin du mathématicien prénommé Henri, 1854-1912.)

VICTOR-EMMANUEL III roi d'Italie de 1900 à 1944.

NICOLAS II dernier tsar de toutes les Russies de 1894 à 1917.

Robert COMTESSE, président de la confédération suisse en 1904 et 1910.

Dates de quelques mathématiciens mentionnés dans l'article

Arthur CAYLEY, 1821–1895 ; fils¹⁸ de Hopkins.

Peter Guthrie TAIT, 1831–1901.

Georg Gerdinant Ludwig Philipp CANTOR, 1845–1918 ;
fils de Kummer et Weierstrass.

Felix KLEIN, 1849–1925 ; fils de Plücker et Lipschitz.

Henri POINCARÉ, 1854–1912 ; fils de Hermite.

Walther VON DYCK, 1856–1934 ; fils de Klein.

Karl Emmanuel Robert FRICKE, 1861–1930 ; fils de Klein.

David HILBERT, 1862–1943 ; fils de Lindemann.

Wilhelm WIRTINGER, 1865–1945 ; fils de Weyr et von Escherich.

Poul HEEGAARD, 1871–1948 ; thèse¹⁹ en 1898.

→ MAX DEHN, 1878–1952 ; fils de Hilbert.

Heinrich Franz Friedrich TIETZE, 1880–1964 ; fils de von Escherich.

Solomon LEFSCHETZ, 1884–1972 ; fils de Story.

Ludwig BIEBERBACH, 1886–1982 ; fils de Klein.

James Waddell ALEXANDER II, 1888–1971 ; fils de Veblen.

Jakob NIELSEN, 1890–1959 ; fils de Landsbert et Dehn.

Heinz HOPF, 1894–1971 ; fils de Erhard Schmidt et Bieberbach.

Carl Ludwig SIEGEL, 1896–1981 ; fils de Landau.

Emil Leon POST, 1897–1954 ; fils de Keyser.

Hellmuth KNESER, 1898–1973 ; fils de Hilbert.

Oscar Ascher ZARISKI, 1899–1986 ; fils de Castelnuovo.

Pyotr Sergeyevich NOVIKOV, 1901–1975 ; fils de Luzin.

Andrei Andreyevich MARKOV, junior²⁰, 1903–1979.

Georges DE RHAM, 1903–1990 ; fils de Lebesgue.

Alonzo CHURCH, 1903–1995 ; fils de Veblen.

Hans FREUDENTHAL, 1905–1990 ; fils de Heinz Hopf.

Ruth MOUFANG, 1905–1977 ; fille de Dehn.

Kurt GÖDEL, 1906–1978 ; fils de Hahn.

¹⁸Au sens du “Mathematics Genealogy Project”. Presque toutes nos dates sont tirées du site correspondant : <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>

¹⁹Remarquablement sans patron de thèse, bien que Heegaard ait été influencé par ses contacts directs avec KLEIN et Julius PETERSEN en 1898, et qu'il ait lu (et corrigé !) l'Analsis situs de POINCARÉ.

²⁰Fils biologique de Andrei Andreyevich Markov, 1856–1922 ; ce dernier fils mathématique de Chebychev.

Werner BURAU, 1906–1994 ; fils de Reidemeister.
 Ott-Heinrich KELLER, 1906–1990 ; fils de Dehn.
 André WEIL, 1906–1998 ; fils de Hadamard et Picard.
 Erich KÄHLER, 1906–2000 ; fils de Lichtenstein.
 Wilhelm MAGNUS, 1907–1990 ; fils de Dehn.
 Karl Johannes Herbert SEIFERT, 1907–1996 ;
 fils de Threlfall et van der Waerden.
 Egbert Rudolf VAN KAMPEN, 1908–1942 ; fils de van der Woude.
 Alan TURING, 1912–1954 ; fils de Church.
 Christos PAPAKYRIAKOPOULOS, 1914–1976.
 Roger Conant LYNDON, 1917–1988 ; fils de Mac Lane.
 Vladimir ROCHLIN, 1919–1984 ; fils de Kolmogorov et Pontryagin.
 Graham HIGMAN, 1917–2008 ; fils de J.H.C. Whitehead.
 William Werner BOONE, 1920–1983 ; fils de Church.
 Ernst Paul SPECKER, 1920 ; fils de Heinz Hopf et Beno Eckmann.
 René THOM, 1923–2002 ; fils de Henri Cartan.
 John Leslie BRITTON, 1927–1994 ; fils de Bernhard H. Neumann.
 Michel KERVAIRE, 1927–2007 ; fils de Heinz Hopf.
 Sergei Ivanovich ADIAN, 1931 ; fils de Novikov.
 Michael Oser RABIN, 1931 ; fils de Church.
 John Robert STALLINGS, 1935–2008 ; fils de Fox.
 Friedhelm WALDHAUSEN, 1938 ; fils de Hirzebruch.
 Andrew CASSON, 1943 ; fils de C.T.C. Wal.
 Mikhael Leonidovich GROMOV, 1943 ; fils de Rochlin.
 Gregori PERELMAN, 1966 ; fils d’Alexandrov et Burago.

REFERENCES

- [BORS–02] Jean-Camille BIRGET, Alexander Yu. OL’SHANSKII, Eliyahu RIPS et Mark V. SAPIR, *Isoperimetric functions of groups and computational complexity of the word problem*, Annals of Math. **156** (2002), 467–518.
- [Boye–02] Steven BOYER, *Dehn surgery on knots*, Chapter 4, pages 165–218, in *Handbook of geometric topology*, R.J. Daverman and R.B. Sher Editors, Elsevier, 2002.
 Chapter 11, pages 301–357, in *History of topology*, I.M. James Editor, Elsevier, 1999.
- [BrHa–99] Martin BRIDSON et André HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer, 1999.
- [Brid–93] Martin BRIDSON, *Combings of semidirect products and 3-manifold groups*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) **3** (1993), 263–278.
- [Brid–02] Martin BRIDSON, *The geometry of the word problem*, in “Invitation to geometry and topology”, Martin R. Bridson and Simon M. Salamon, Editors, Oxford Univ. Press (2002), 29–91.
- [BuFu] Voir par exemple l’article *Geodesic dome*, dans Wikipedia :

- <http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesicdome>
- [Burn–11] William BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, second edition, Cambridge Univ. Press, 1911.
- [BuZi–85] Gerhard BURDE et Heiner ZIESCHANG, *Knots*, de Gruyter, 1985.
- [CaFe–76] James W. CANNON et Charles D. FEUSTEL, *Essential embeddings of annuli and Möbius bands in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 219–239.
- [ChMa–82] Bruce CHANDLER et Wilhelm MAGNUS, *The history of combinatorial group theory: a case study in the history of ideas*, Springer, 1982.
- [DaGu] François DAHMANI et Vincent GUIRADEL, *The isomorphism problem for all hyperbolic groups*, arXiv:1002.25901v1, 12 Feb 2010.
- [Daws–02] John W. DAWSON JR., *Max Dehn, Kurt Gödel, and the Trans-Siberian escape route*, Notices of the Amer. Math. Soc. **49**⁹ (October 2002), 1068–1075.
- [DeHe–07] Max DEHN et Poul HEEGAARD, *Analysis situs*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 1907–1910, vol. III.1.1, pages 153–220.
- [Dehn–07] Max DEHN, *Berichtigender Zusatz zu III A B 3 Analysis situs*, Jahrbuch der deutschen Mathematiker-Vereinigung **16** (1907), 573.
[Il s’agit d’une correction aux pages 186 et suivantes de [DeHe–07] ; “III A B 3” décrit la place de l’article de Dehn et Heegaard dans l’*Enzyklopädie*. Compte-rendu récent de [Dehn–07] : voir [Stil–79].]
- [Dehn–a] Max DEHN, *Lectures on group theory*, chapitre d’un cours de Dehn, non publié, rédaction vraisemblablement de 1909 ou 1910, article 1 de [DeSt–87].
- [Dehn–b] Max DEHN, *Lectures on surface topology*, autre chapitre du même cours, article 2 de [DeSt–87].
- [Dehn–10] Max DEHN, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, Math. Ann. **69** (1910), 137–168, voir aussi *On the topology of three-dimensional space*, Paper 3 in [DeSt–87].
- [Dehn–11] Max DEHN, *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Math. Ann. **71** (1912), 116–144, voir aussi *On infinite discontinuous groups*, Paper 4 in [DeSt–87].
Le volume **71** des Mathematische Annalen est daté de 1912. Mais le fascicule 1 (pages 1–144) est daté du 25 juillet 1911, le fascicule 2 du 19 septembre 1911, je n’ai pas vu le fascicule 3, et le fascicule 4 est daté du 23 janvier 1912. C’est pour cela que nous adoptons [Dehn–11] pour cette référence, souvent citée comme datant de 1912.
- [Dehn–12] Max DEHN, *Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen*, Math. Ann. **72** (1912), 413–421, voir aussi *Transformation of curves on two-sided surfaces*, Paper 5 in [DeSt–87].
- [Dehn–14] Max DEHN, *Die beiden Kleeblattschlingen*, Math. Ann. **75** (1914), 402–413, voir aussi *The two trefoil knots*, Paper 6 in [DeSt–87].
- [Dehn–38] Max DEHN, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Math. Ann. **69** (1938), 145–206, voir aussi *The group of mapping classes*, Paper 8 in [DeSt–87].
- [DeSt–87] Max DEHN, *Papers on group theory and topology, translated and introduced by John Stillwell*, Springer, 1987.

- [EiSt–52] Samuel EILENBERG et Norman STEENROD, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, 1952 (Second printing 1957).
- [Eppl–95] Moritz EPPLE, *Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory*, Hist. Math. **22** (1995), 371–401.
- [Eppl–99a] Moritz EPPLE, *Geometric aspects in the development of knot theory*, Chapter 11, pages 301–357, in *History of topology*, I.M. James Editor, Elsevier, 1999. Dans le même livre, chapitre 32 de James, avec quelques informations sur Wirtinger, Tietze, Lefschetz, etc. Chapitres 34 sur Heegaard et 37 sur Nielsen.
- [Eppl–99b] Moritz EPPLE, *Die Entstehung der Knotentheorie*, Vieweg, 1999.
- [Ep+5–92] David B.A. EPSTEIN, James W. CANNON, Derek F. HOLT, Silvio V.F. LEVY, Michael S. PATERSON et William P. THURSTON, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- [Feus–76] Charles D. FEUSTEL, *On the torus theorem and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **217** (1976), 1–43.
- [FrKl–97] Robert FRICKE et Felix KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* (2 volumes), Teubner, 1897 et 1912. [Je ne connais que la 2e édition, de 1912. Voir notamment les figures des pages 82, 230–233, 555–564, 621 du volume 1, et 280, 567 du volume 2.]
- [Goda–62] Jean-Luc GODARD, *Vivre sa vie*, 1962. Conversation entre Nana et Brice Parain : <http://www.youtube.com/watch?v=tVC8IDVZZuI>
- [Gord–99] Cameron GORDON, *3-dimensional topology up to 1960*, Chapter 15, pages 449–489, in *History of topology*, I.M. James Editor, Elsevier, 1999.
- [Grom–87] Misha GROMOV, *Hyperbolic groups*, in “Essays in Group Theory”, S.M. Gersten Editor, M.S.R.I. Publ. **8**, Springer (1987), 75–263.
- [Grom–93] Misha GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Volume 2 of “Geometry group theory, Sussex 1991”, G.A. Niblo and M.A. Roller, Editors, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [Gugg–77] H. GUGGENHEIMER, *The Jordan curve theorem and an unpublished manuscript by Max Dehn*, Arch. Hist. Exact Sci. **17** (1977), 193–200.
- [GuMa–86] Lucien GUILLOU et Alexis MARIN, *A la recherche de la topologie perdue. I Du côté de chez Rohlin. II Du côté de Casson*, Birkhäuser, 1986.
- [Hemp–76] J. HEMPEL, *3-manifolds*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1976.
- [Iver–92] Birger IVERSEN, *Hyperbolic geometry*, LMS Student Texts **25**, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [Kauf–83] Louis H. KAUFFMAN, *Formal knot theory*, Princeton University Press, 1983.
- [Kerv–69] Michel Kervaire, *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 67–72.
- [KlFr–90] Felix KLEIN et Robert FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, (2 volumes), Teubner, 1890 et 1892. [Voir notamment les figures des pages 370 et 464 du volume 1.]
- [Lefs–24] Solomon LEFSCHETZ, *L’analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, 1924.

- [Lefs-68] Solomon LEFSCHETZ, *A page of mathematical autobiography*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 854–879.
- [Lynd-60] Roger C. LYNDON, *Groups with parametric exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 518–533.
- [Magn-78] Wilhelm MAGNUS, *Max Dehn*, Math. Intelligencer **1**³ (1978), 132–143.
- [Magn-94] *The mathematical legacy of Wilhelm Magnus, Groups, geometry and special functions*, Conference on the legacy of Wilhelm Magnus, May 1-3, 1992, William Abikoff, Joan S. Birman, and Kathryn Kuiken, Editors, Contemporary Mathematics **169** (1994).
- [MaKS-66] Wilhelm MAGNUS, Abraham KARRASS et Donald SOLITAR, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience, 1966.
- [Mesk-74] Stephen MESKIN, *A finitely generated residually finite group with an unsolvable word problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **43** (1974), 8-10.
- [Mill-71] Charles F. MILLER III, *Group-theoretic decision problems and their classification*, Annals of Math. Studies **68**, 1971.
- [Mill-92] Charles F. MILLER III, *Decision problems for groups – survey and reflections*, in “Algorithms and classification in combinatorial group theory”, G. Baumslag and C.F. Miller III, Editors, M.S.R.I. Publ. **23** (1992), 1–59.
- [Miln-82] John MILNOR, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 9–24.
- [Papa-57a] Christos Dimitriou PAPAKYRIAKOPOULOS, *On solid tori*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 281–299.
- [Papa-57b] Christos Dimitriou PAPAKYRIAKOPOULOS, *On Dehn’s lemma and the asphericity of knots*, Annals of Math. **66** (1957), 1–26.
- [Penn] *Interview with Film Director Artur Penn*, <http://www.thirteen.org/bucky/penn.html>
- [Poin-82] Henri POINCARÉ, *Théorie des groupes fuchsien*, Acta Math. **1** (1882), 1–62 (= Oeuvres, tome II, 109–168).
- [Poin-83] Henri POINCARÉ, *Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions*, Bull. Soc. Math. France **11** (1883), 112–125 (= Oeuvres, tome II, 109–168).
- [Poin-95] Henri POINCARÉ, *Analysis situs*, J. de l’École Polytechnique **1** (1895), 1–123 (= Oeuvres, tome VI, 193–288).
- [Poin-04] Henri POINCARÉ, *Cinquième complément à l’analysis situs*, Rend. Circ. Math. Palermo **18** (1904), 45–110 (= Oeuvres, tome VI, 435–498).
- [Prea-06] Jean-Philippe PRÉAUX, *Conjugacy problem in groups of oriented geometrizable 3-manifolds*, Topology **45** (2006), 171–208.
- [Prea] Jean-Philippe PRÉAUX, *Conjugacy problem in groups of non-oriented geometrizable 3-manifolds*, arXiv:math/0512484v1, 21 Dec 2005.
- [Rham-69] Georges DE RHAM, *Lectures on introduction to algebraic topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969.
- [Robi-96] Derek J.S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Second Edition, Springer, 1996.

- [Roch-51] Vladimir Abramovich ROCHLIN, *A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one*, Doklady Akad. Nauk SSSR **81** (1951), 355–357.
- [Rolf-76] Dale ROLFSEN, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976 [reprinted with corrections, AMS Chelsea Publishing, 2003].
- [Rotm-95] Joseph J. ROTMAN, *An introduction to the theory of groups*, Fourth Edition, Springer, 1995.
- [Save-02] Nikolai SAVELIEV, *Invariants for homology 3-spheres*, Encyclopaedia of mathematical sciences, Springer, 2002.
- [SaBR-02] Mark V. SAPIR, Jean-Camille BIRGET et Eliyahu RIPS, *Isoperimetric and isodiametric functions of groups*, Annals of Math. **156** (2002), 345–466.
- [Sela-95] Zlil SELA, *The isomorphism problem for hyperbolic groups, I*, Annals of Math. **141** (1995), 217–283.
- [Seif-31] Herbert SEIFERT, *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*, Ber. Sächs. Adak. Wiss. **83** (1931), 26–66.
- [Seif-33] Herbert SEIFERT, *Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume*, Acta Mathematica **60** (1933), 147–288. Traduit par W. Heil : *Topology of 3-dimensional fibered spaces*, [SeTh-80], pages 359–422.
- [SeTh-80] Herbert SEIFERT et William THRELFALL, *A textbook of topology*, Academic Press, 1980. (Traduction du “Lehrbuch der Topologie” de 1934).
- [Sher-94] R.B. SHER, *Max Dehn and Black Mountain College*, Math. Intelligencer **16**¹ (1994), 54–55.
- [Shor-07] Hamish SHORT, *Diagrams and groups*, in “The geometry of the word problem for finitely generated groups”, Noel Brady, Tim Riley and Hamish Short, Editors, Birkhäuser, 2007.
- [Sieg-64] Carl Ludwig SIEGEL, *Zur Geschichte der Frankfurter Mathematischen Seminars*, Frankfurter Universitätsreden **36** (1964) = *Gesammelte Abhandlungen III*, 462–474. Traduction anglaise : *On the history of the Frankfurt mathematics seminar*, Math. Intelligencer **1**⁴ (1979), 223–232.
- [Stal-60] John STALLINGS, *On the loop theorem*, Annals of Math. **72** (1960), 12–19.
- [Stal-71] John STALLINGS, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale Mathematical Monographs **4**, 1971.
- [Stee-51] Norman STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [Stil-79] John STILLWELL, *Letter to the Editors*, Math. Intelligencer **1**⁴ (1979), 192.
- [Stil-82] John STILLWELL, *The word problem and the isomorphism problem for groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 33–56.
- [Stil-93] John STILLWELL, *Classical topology and combinatorial group theory*, second edition, Springer, 1993.
- [Stil-99] John STILLWELL, *Max Dehn*, Chapter 36, pages 965–978, in *History of topology*, I.M. James Editor, Elsevier, 1999.
- [Thom-51] René THOM, *Quelques propriétés des variétés bords*, Coll. Top. Strasbourg, 1951, no V, 10 pages.

- [Thur-76] William P. THURSTON, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms or surfaces I*, circulated preprint, 1976.
- [Thur-88] William P. THURSTON, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.
- [Tiet-42] Heinrich TIETZE, *Ein Kapitel Topologie. Zur Einführung in die Lehre von den verknoteten Linien*, Teubner, 1942.
- [Wald-68] Friedhelm WALDHAUSEN, *The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds*, Annals of Math. **88** (1968) 272–280.
- [Wald-69] Friedhelm WALDHAUSEN, *On the determination of some bounded 3-manifolds by their fundamental groups alone*, Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications (Herceg-Novi, Yugoslavia, 1968), Beograd (1969), pp. 331–332.
- [Weil-91] André WEIL, *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, 1991.
- [Zeem-02] E.C. ZEEMAN, *On Hilbert's third problem*, Mathematical Gazette **86** (2002), 241–247.
- [Zism-99] Michel ZISMAN, *Fibre bundles, fibre maps*, Chapter 22, pages 605–629, in *History of topology*, I.M. James Editor, Elsevier, 1999.
- [Zong-05] Chuanming ZONG, *What is known about unit cubes*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 181–211.

PIERRE DE LA HARPE : SECTION DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE GENÈVE,
C.P. 64, CH-1211 GENÈVE 4.

E-mail address: Pierre.delaHarpe@unige.ch