N° d'ordre:

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Oana Pocovnicu

Etude d'une équation non linéaire, non dispersive et complètement intégrable et de ses perturbations

Soutenue le 29 Septembre 2011 devant la Commission d'examen:

M.	Nicolas BURQ	
M.	Jean-Marc DELORT	
M.	Patrick GÉRARD	(Directeur de thèse)
M.	Benoît GRÉBERT	(Rapporteur)
Mme.	Galina PERELMAN	
M.	Pierre RAPHAËL	(Rapporteur)

Rapporteurs:

M.	Benoît GRÉBERT
M.	Pierre RAPHAËL

Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

On étudie dans cette thèse *l'équation de Szegö* sur la droite réelle

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u), \ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

où Π_+ est le projecteur sur les fréquences positives. On étudie également ses perturbations. Cette équation a été introduite il y a quelques années par Gérard et Grellier comme modèle mathématique d'une équation non linéaire totalement *non dispersive*. L'équation de Szegö apparait naturellement dans l'étude de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) dans certaines situations sur-critiques où l'on constate un manque de dispersion, par exemple lorsque l'on considère NLS sur le groupe de Heisenberg. Par conséquent, une des motivations de cette thèse est d'établir des résultats concernant l'équation de Szegö qui pourront éventuellement être utilisés dans le contexte de l'équation de Schrödinger non linéaire.

Le premier résultat de cette thèse est la classification des solitons de l'équation de Szegö. On montre que ce sont tous des fonctions rationnelles ayant un unique pôle qui est simple. De plus, on prouve que les solitons sont orbitalement stables.

La propriété la plus remarquable de l'équation de Szegö est le fait qu'elle est complètement intégrable, ce qui permet notamment d'établir une formule explicite de sa solution. Comme applications de cette formule, on obtient les trois résultats suivants. (A) On montre que les solutions fonctions rationnelles génériques se décomposent en une somme de solitons et d'un reste qui est petit lorsque le temps tend vers l'infini. (B) On met en évidence un exemple de solution non générique dont les grandes normes de Sobolev tendent vers l'infini avec le temps. (C) On détermine des coordonnées action-angle généralisées lorsque l'on restreint l'équation de Szegö à une sous-variété de dimension finie. En particulier, on en déduit qu'une grande partie des trajectoires de cette équation sont des spirales autour de cylindres toroïdaux $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$.

Comme l'équation de Szegö est complètement intégrable, il est ensuite naturel d'étudier ses perturbations et d'établir de nouvelles propriétés pour celles-ci à partir des résultats connus pour l'équation de Szegö. Une perturbation de l'équation de Szegö est l'équation des ondes non linéaire suivante (NLW) de donnée bien préparée

$$i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v, \ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On prouve que si la donnée initiale de NLW est petite et à support dans l'ensemble des fréquences positives, la solution de NLW est alors approximée pour un temps long par la solution de l'équation de Szegö. Autrement dit, on démontre ainsi que l'équation de Szegö est la première approximation de NLW. On construit ensuite une solution de NLW dont les grandes normes de Sobolev augmentent (relativement à la norme de la donnée initiale).

Sur le tore $\mathbb{T}$, Gérard et Grellier ont démontré un résultat analogue d'approximation de NLW. On améliore ce résultat en trouvant une approximation plus fine, de deuxième ordre.

Dans une dernière partie, on s'intéresse à l'équation de Szegö perturbée par un potentiel multiplicatif petit. On étudie l'interaction de ce potentiel avec les solitons. Plus précisément, on montre que, si la donnée initiale est celle d'un soliton pour l'équation non perturbée, la solution de l'équation perturbée garde la forme d'un soliton sur un long temps. De plus, on déduit la dynamique effective, i.e. les équations différentielles satisfaites par les paramètres du soliton.

Mots-clefs : équation de Szegö, paire de Lax, opérateur de Hankel, soliton, coordonnées action-angle, équation des ondes non linéaire, méthode du groupe de renormalisation.

Study of a nonlinear, non-dispersive, completely integrable equation and its perturbations

Abstract

In this Ph.D. thesis, we study the *Szegö equation* on the real line

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u), \ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

where Π_+ is the projector onto the non-negative frequencies. We also study its perturbations. It was recently introduced by Gérard and Grellier as a toy model of a non-linear totally *non dispersive* equation. The Szegö equation appears naturally in the study of the non-linear Schrödinger equation (NLS) in super-critical situations where dispersion lacks, for example, when one considers NLS on the Heisenberg group. Consequently, one of the motivations of this Ph.D. thesis is finding new results for the Szegö equation in hope that they could be eventually used in the context of the non-linear Schrödinger equation.

Our first result is a classification of the solitons of the Szegö equation. We show that they are all rational functions with one simple pole. In addition, we prove the orbital stability of solitons.

The Szegö equation has the remarkable property of being completely integrable. This allows us to find an explicit formula for solutions. We obtain three applications of this formula. (A) We prove soliton resolution for solutions which are generic rational functions. (B) We construct an example of non-generic solution whose high Sobolev norms grow to infinity over time. (C) We find generalized action-angle variables when restricting the Szegö equation to a finite dimensional sub-manifold. In particular, this yields that most of the trajectories of the Szegö equation are spirals around toroidal cylinders $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$.

Since the Szegö equation is completely integrable, it is natural to study its perturbations and deduce new properties of such perturbations from the known results for the Szegö equation. One perturbation of the Szegö equation is the following non-linear wave equation (NLW) with small initial data

$$i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v, \ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

We prove that the Szegö equation is the first order approximation of NLW. More precisely, if an initial condition of NLW is small and supported only on non-negative frequencies, then the corresponding solution can be approximated by the solution of the Szegö equation, for a long time. We then construct a solution of NLW whose high Sobolev norms grow.

On the torus $\mathbb{T}$, Gérard and Grellier proved an analogous first order approximation result for NLW. By considerning the second order approximation, we obtain an improved result with a smaller error.

Lastly, we consider the Szegö equation perturbed by a small multiplicative potential. We study the interaction of this potential with solitons. More precisely, we show that, if the initial condition is that of a soliton for the unperturbed Szegö equation, then the solution preserves the shape of a soliton for a long time. In addition, we prescribe the effective dynamics, i.e. we derive the differential equations satisfied by the parameters of the soliton.

Keywords : Szegö equation, Lax pair, Hankel operators, soliton resolution, action-angle coordinates, non-linear wave equation, renormalisation group method, averaging method.

Cette thèse est dédiée à la mémoire de ma grand-mère,
Aglaia PRUTEANU

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Patrick Gérard, pour les sujets de recherche très intéressants qu'il m'a proposés, pour son soutien lors de la préparation des articles qui composent cette thèse, pour sa disponibilité et le temps qu'il m'a accordé tout au long de ces années, pour ses explications très claires et précises, pour sa patience et sa gentillesse. J'aurai toujours la plus grande admiration pour sa vision claire, sa puissance technique, son expérience et ses connaissances dans des domaines très différents des mathématiques. Bien des fois, je me suis retrouvée émerveillée par son savoir après un rendez-vous avec lui. De plus, en travaillant sur un sujet très proche de son travail actuel, j'ai pu voir comment ses idées naissaient, observer et apprendre son attitude et sa manière de réfléchir à un problème mathématique. Ce sont parmi mes acquis les plus précieux pendant cette thèse et je me rends compte que j'ai eu une grande chance d'apprendre tout cela de lui. Je lui suis profondément reconnaissante pour tout ce qu'il m'a appris.

Je remercie chaleureusement Benoît Grébert et Pierre Raphaël d'avoir accepté le rôle des rapporteurs de ma thèse. Je leur suis reconnaissante pour leur lecture attentive et pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ma thèse.

Je remercie Nicolas Burq, Jean-Marc Delort et Galina Perelman qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je profite aussi de l'occasion pour exprimer ma gratitude pour la Bourse du Gouvernement Français que j'ai reçue pendant le Master 2 et pour l'Allocation de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche qui a servi à financer cette thèse. Ces deux bourses m'ont permis de poursuivre mes études dans un des meilleurs laboratoires du monde. Je remercie aussi Nicolas Burq, Patrick Gérard et l'école doctorale pour leur financement (ANR, IUF) qui m'a permis de participer à tous les séminaires, conférences et écoles d'été qui m'ont intéressée.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Claude Zuily et Patrick Gérard pour leur cours exceptionnel de Master 2 sur l'équation de Schrödinger non linéaire, qui m'a incitée à choisir les équations aux dérivées partielles (dispersives) comme domaine de recherche. Je suis aussi reconnaissante pour tous les cours que j'ai suivis pendant mon Master 2 à Orsay et pendant le Doctorat, qui ont été d'un très haut niveau.

Je remercie mes professeurs à l'Université Alexandru Ioan Cuza à Iassy, en Roumanie et à l'Ecole Normale Supérieure de Bucarest. Tout particulièrement je suis reconnaissante à Ioan Vrabie et Catalin Lefter qui m'ont recommandé à poursuivre mes études en France et qui ont organisé des groupes de travail en analyse pour les étudiants pendant plusieurs années. Sans leurs conseils je ne serais pas arrivée au stade auquel je suis aujourd'hui. Ma gratitude s'adresse également à mon professeur de mathématiques au lycée, Francisc Cosa, qui m'a donné le goût des mathématiques et m'a encouragé à participer aux olympiades.

Je souhaite remercier tous ceux avec qui j'ai effectué mon enseignement pendant le monitorat, en particulier Jean-Christophe Léger et Nalini Anantharaman. Cela a été un plaisir de travailler avec eux.

Mes remerciements vont à tous les membres de l'équipe ANEDP d'Orsay pour leur accueil chaleureux et pour les séminaires. Je remercie Valérie Lavigne et Catherine Poupon qui ont été toujours très disponibles et efficaces et m'ont aidée pour toutes mes démarches administratives. Je voudrais aussi remercier le personnel de la bibliothèque, du service informatique et de la résidence La Pacaterie, où j'ai habité, d'être très aimable et compréhensif.

Merci à “mes soeurs et frère" en mathématiques, Ramona Anton, Valeria Banica et Camille Laurent pour leurs conseils, encouragements et gentillesse. Merci à Radu Ignat et Marius Paicu pour leur aide dans le choix d'un domaine de recherche mathématique.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont invitée à donner des exposés dans des séminaires ou des conférences ainsi que les organisateurs des écoles d'été et des conférences auxquelles j'ai participé. Merci à tous les mathématiciens qui un jour m'ont prêté de leur temps, m'ont écoutée, m'ont donné une référence ou un conseil, en particulier à Sandrine Grellier, Zaher Hani, Philippe Gravejat, et Macej Zworski.

Je voudrais remercier Jim Colliander pour ses conseils concernant ma carrière et ma vie personnelle, ses encouragements et sa gentillesse. Je remercie aussi Monica Visan et Rowan Killip pour leur récente invitation à UCLA, pour les discussions de mathématiques fort interessantes et pour leur gentillesse.

Je tiens aussi à remercier tous les doctorants pour l'atmosphère amicale très agréable, tout particulièrement Abed, Adeline, Aurélien, Bernardo, Camille, Guillaume, Marianne, Olivier, Shweta et Thi Thou. Un grand merci à Ramla qui a consacré une partie de son temps, pendant qu'elle rédigeait sa thèse, à corriger les chapitres en français de la mienne. Je la remercie aussi pour son amitié et pour avoir partagé mes pensées et mes inquiétudes pendant notre dernière année de thèse.

Un grand merci à mes amis en France, surtout à Adina, Corina et Sergiu, pour leur bonne humeur et leurs encouragements. Nos rencontres ont apporté de la chaleur et des couleurs dans ma vie.

Merci de tout mon coeur à Hiro pour son soutien, ces trois dernières années. Je le remercie pour les discussions mathématiques intéressantes, de m'avoir appris à utiliser Latex et de m'avoir donné l'opportunité de faire la connaissance, par son intermédiaire, de plusieurs mathématiciens célèbres aux Etats Unis et Canada. Je le remercie aussi pour ses efforts de me rendre visite souvent en France, pour son optimisme, sa patience et ses encouragements.

Je remercie ma mère, mon père, mon frère Andrei et toute ma famille en Roumanie pour leur soutien et affection inconditionnels et d'avoir toujours été prêts de moi malgré la distance qui nous sépare. Merci à ma mére pour le long trajet qu'elle a fait pour être avec moi le jour de ma soutenance.

Cette thèse est dédiée à la mémoire de ma grand-mère. Même si elle n'est jamais venue en France et même si elle ne conaissait pas le domaine de la recherche, elle s'est intéressée presque tous les jours, au téléphone, à l'avancement de cette thèse et a montré une compréhension hors du commun de mon travail et de ma vie en France. Son amour, sa force, son dynamisme et son optimisme m'ont aidé à réaliser ce travail. Cette thèse lui est dédiée parce que j'y ai investi une partie du temps qu'elle aurait voulu que je passe avec elle.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Cette thèse est consacrée à l'analyse détaillée de l'équation de Szegö sur la droite réelle et de ses perturbations. L'équation de Szegö s'écrit

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{SZ}$$

où Π_+ est le projecteur de Szegö sur les fréquences positives ou nulles. Elle a été récemment introduite par Gérard et Grellier dans [34, 35] comme un modèle mathématique d'une équation hamiltonienne non linéaire *totalement non dispersive*. Une propriété remarquable de l'équation de Szegö est le fait qu'elle est complètement intégrable. Il est donc naturel d'étudier ses perturbations.

La première perturbation à laquelle on s'intéresse est l'équation des ondes non linéaire suivante :

$$\begin{cases} i\partial_t u - |D|u = |u|^2 u \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{NLW}$$

Si la donnée initiale est ε-petite et entièrement supportée sur des fréquences positives ou nulles, alors on montre que la première approximation de (NLW) est l'équation de Szegö.

La deuxième perturbation que l'on étudie dans cette thèse est la perturbation par un potentiel petit de type Toeplitz $\varepsilon T_b u$, où $T_b u = \Pi_+(bu)$:

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u) + \varepsilon T_b u \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{TSZ}$$

Le potentiel de type Toeplitz est la généralisation naturelle d'un potentiel multiplicatif qui nous permet de garder la structure hamiltonienne de l'équation.

Dans la section suivante, on décrit ce qui a motivé l'introduction de l'équation de Szegö.

1.1 Motivation : l'équation de Schrödinger non linéaire dans des régimes non dispersives et sur-critiques

La structure de l'équation de Szegö (SZ) apparait naturellement dans l'étude de l'équation de Schrödinger non linéaire défocalisante :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{NLS}$$

où $u : \mathbb{R}_t \times M_x \to \mathbb{C}$ et M est une variété. L'équation (NLS) est un modèle de propagation des ondes dans les fibres optiques et en mécanique quantique. Elle a été intensivement étudiée dans les trois dernières décennies par des mathématiciens de diverses branches pures et appliquées ainsi que par des physiciens.

1.1.1 Propriétés de dispersion de l'équation de Schrödinger

La propriété principale de (NLS) est la *dispersion*. Celle-ci est caractérisée par le fait que si l'on n'impose aucune condition au bord, alors les solutions de l'équation ont tendance à s'étaler dans le temps. Pour formaliser cette assertion, on considère l'équation de Schrödinger linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u_L + \Delta u_L = 0 \\ u_L(0) = u_0 \end{cases} \tag{LS}$$

sur $M = \mathbb{R}^n$. Grâce à la transformation de Fourier, on a une formule explicite pour la solution $u_L(t,x) = e^{it\Delta}u_0$ de cette équation :

$$u_L(t,x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{4t}|x-y|^2} u_0(y)dy.$$

Alors, $u_L(t,x)$ satisfait *l'estimation de dispersion* suivante :

$$\|u_L(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1.1}$$

D'autre part, la norme L^2 est conservée : $\|u_L(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, quand le temps augmente, la norme L^∞ de $u_L(t)$ décroit, tandis que la norme L^2 reste constante. C'est ce phénomène que l'on appelle la *dispersion.* La conséquence principale de l'estimation de dispersion (1.1.1) est représentée par les estimations de Strichartz, qui sont un outil très important dans l'étude de (NLS). Elles affirment que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_L(t,x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} = \|u_L\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

si (p,q) est une paire admissible, i.e. $p \geq 2$, $(p,q,n) \neq (2,\infty,2)$ et

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}.$$

Par exemple, pour $M = \mathbb{R}^2$ et $(p,q) = (4,4)$, on obtient

$$\|u_L\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

1.1.2 Le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire cubique

L'équation (NLS) est hamiltonienne d'énergie :

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4},$$

où la norme homogène de Sobolev $\dot{H}^1$ est définie par

$$\|f\|_{\dot{H}^1} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Donc, au moins formellement, l'énergie de la solution est conservée : $E(u(t)) = E(u_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'invariance de l'équation par rapport aux modulations prouve que la norme L^2 de la solution est aussi conservée : $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'équation (NLS) cubique a la propriété de scaling suivante : si $u(t,x)$ est solution de l'équation (NLS), alors $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ l'est aussi. De plus, en considérant l'équation (NLS) sur $M = \mathbb{R}^4$, on obtient

$$\|u_\lambda\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^4)} = \|u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^4)} \text{ et } E(u_\lambda) = E(u).$$

Dans ce cas, on dit que l'équation (NLS) est *critique du point de vue de l'énergie* sur $\dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$. On dira qu'elle est *sous-critique* sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)$ si $s > 1$ et *sur-critique* sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)$ si $0 \leq s < 1$.

Les estimations de Strichartz jouent un rôle très important dans la preuve du fait que l'équation (NLS) est régulièrement localement bien posée. Le fait qu'une équation soit bien posée fait référence à l'existence et l'unicité de la solution sur un intervalle du temps $[-T, T]$, ainsi qu'à la dépendance continue par rapport aux données initiales. Le fait qu'une équation soit régulièrement bien posée est plus restrictif et est défini comme suit :

Definition 1. On dit que l'équation (NLS) est *régulièrement bien posée* sur $H^s(M)$ si pour tout sous-ensemble borné B de $H^s(M)$, il existe $T > 0$ et un espace de Banach X_T continuellement inclus dans $C([-T, T], H^s(M))$ de sorte que :

1. Pour tout $u_0 \in B$, l'équation (NLS) a une solution unique $u \in X_T$ telle que $u(0) = u_0$.
2. Si $u_0 \in H^\sigma(M)$ pour $\sigma > s$, alors $u \in C([-T, T], H^\sigma(M))$.
3. L'application $u_0 \in B \mapsto u \in X_T$ est régulière.

La restriction la plus importante de cette définition réside dans le fait que la solution dépend d'une manière régulière de la donnée initiale, et pas seulement d'une manière continue. La technique classique qui combine un argument de point fixe avec les estimations de Strichartz prouve que l'équation (NLS) est régulièrement bien posée dans des régimes sous-critiques. De plus, les estimations de Strichartz constituent une condition nécessaire pour que l'équation soit bien posée, comme cela a été démontré dans [17, Remarque 2.12] et dans [35]. On cite ci-dessous la Proposition 10 dans [35].

Proposition 1.1.1. *Si l'équation* (NLS) *est régulièrement bien posée dans* $H^s(M)$ *avec* $s \geq 0$, *alors pour tout* $r > s$ *on a :*

$$\|u_L\|_{L^4([0,1]\times M)} \leq C_r \|u_0\|_{H^{r/2}(M)}.$$

Si on peut étendre la solution locale pour tout temps, alors on dit que l'équation est *globalement bien posée*. Le fait que l'équation (NLS) est globalement bien posée dans des régimes sous-critiques est une conséquence de la conservation de l'énergie et de la norme L^2.

Dans des régimes critiques, on peut démontrer sans beaucoup de difficulté que l'équation est globalement bien posée pour des données petites. Dans le cas critique de l'équation (NLS) sur $H^1(\mathbb{R}^4)$, le fait qu'elle est globalement bien posée a été démontré pour des données arbitraires dans [83, 87]. L'argument est beaucoup plus complexe que dans le cas des données petites, et il suit les grandes lignes de [21], où les auteurs prouvent que l'équation (NLS) quintique sur $\mathbb{R}^3$ est globalement bien posée.

1.1.3 L'équation de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg

Dans [15, 16, 17], Burq, Gérard et Tzvetkov ont étudié l'équation (NLS) sur des variétés Riemanniennes compactes. Ils ont remarqué que ses propriétés dispersives sont influencées par la géométrie de la variété. En allant encore plus loin, Bahouri, Gérard et Xu [7] et ensuite Gérard et Grellier [34] ont observé un manque de dispersion de l'équation (NLS) sur des variétés sous-riemanniennes, comme le groupe de Heisenberg.

Dans ce qui suit, on considère l'équation (NLS) sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$. En suivant [34], on explique ce qui a conduit à la conclusion que, dans ce contexte, il existe un manque de dispersion et que l'équation (NLS) est sur-critique. Le symbole Δ désigne le laplacien de Kohn, défini par

$$\Delta = \frac{1}{2}(Z\bar{Z} + \bar{Z}Z), \text{ où } \quad Z := \partial_z - i\bar{z}\partial_s, \quad \bar{Z} := \partial_{\bar{z}} + iz\partial_s.$$

Le hamiltonien est dans ce cas donné par

$$E(u) = \int_{\mathbb{H}^1} (|\nabla_h u|^2 + \frac{1}{2}|u|^4)|dzds|,$$

où $\nabla_h = (Zu, \bar{Z}u)$ est le gradient horizontal de u. On remarque que l'énergie a le même scaling que $\dot{H}^1_h(\mathbb{H}^1)$ et que la dimension homogène de $\mathbb{H}^1$ est égale à quatre. Par conséquent, l'argument utilisé dans le cas de $\mathbb{R}^4$ nous dit que l'équation (NLS) sur $\dot{H}^1_h(\mathbb{H}^1)$ devrait être critique et qu'elle devrait donc être globalement régulièrement bien posée, au moins pour des données petites. Si ceci était vrai, la Proposition 1.1.1 impliquerait que

$$\|u_L\|_{L^4([0,1]\times\mathbb{H}^1)} \leq C_r \|u_0\|_{H^{r/2}(\mathbb{H}^1)}. \tag{1.1.2}$$

si $r > 1$.

On montre ci-dessous qu'une telle inégalité ne peut être vraie que si $r \geq 2$.

On se restreint pour cela au cas plus simple qui consiste à considérer des données initiales radiales dans $L^2(\mathbb{H}^1)$. Comme cela a été démontré dans [7], le sous-espace des fonctions radiales de $L^2(\mathbb{H}^1)$ s'écrit sous la forme d'une somme directe orthogonale $\oplus_\pm \oplus_{m=0}^\infty V_m^\pm$, où

$$\Delta_{|V_m^\pm} = \pm i(2m+1)\partial_s.$$

Alors, pour $u_0 \in V_m^\pm$, on a $e^{it\Delta}u_0(z,s) = u_0(z, s \mp (2m+1)t)$ et donc

$$\|e^{it\Delta}u_0(z,s)\|_{L^4([0,1],\mathbb{H}^1)} = \|u_0\|_{L^4(\mathbb{H}^1)}.$$

Ensuite, on dispose des inclusions de Sobolev sur $\mathbb{H}^1$:

$$\dot{H}^s(\mathbb{H}^1) \subset L^4(\mathbb{H}^1), \text{ si } \ s \geq 1,$$

qui montrent que l'inégalité (1.1.2) est vraie pour $u_0 \in V_m^{\pm}$ seulement si $r \geq 2$.

La différence d'une demi-dérivée dans le membre de droite de (1.1.2), entre les prédictions qui ont été faites d'après le cas de $\mathbb{R}^4$ et la situation spécifique de $\mathbb{H}^1$, prouve qu'il y a un manque de dispersion pour l'équation (NLS) sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1$. De plus, ceci montre aussi que (NLS) ne peut pas avoir un flot régulier dans $\dot{H}^1(\mathbb{H}^1)$. Cela peut seulement être vrai pour une régularité supérieure ou égale à $\dot{H}^2(\mathbb{H}^1)$. Par conséquent, les prédictions faites en se basant sur le cas de $\mathbb{R}^4$ sont fausses et l'équation de Schrödinger non linéaire sur $\dot{H}^1(\mathbb{H}^1)$ devrait être considérée plutôt comme sur-critique que comme critique.

On remarque aussi que, en notant par $\Pi_m^{\pm}$ la projection orthogonale sur $V_m^{\pm}$ et $u_m^{\pm} = \Pi_m^{\pm}(u)$, on obtient que l'équation (NLS) est équivalente au système infini suivant d'équations de transport :

$$i(\partial_t \pm (2m+1)\partial_s)u_m^{\pm} = \Pi_m^{\pm}(|u|^2 u), \text{ pour } m \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, une meilleure compréhension de l'équation de Schrödinger non linéaire sur le groupe de Heisenberg demande l'étude de l'interaction entre la non-linéarité $|u|^2 u$ et les projecteurs $\Pi_m^{\pm}$. L'équation la plus simple dans laquelle une telle interaction apparait est l'équation de Szegö

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u),$$

où Π_+ est le projecteur sur les fréquences positives ou nulles.

Un autre exemple pour lequel une analyse similaire peut être faite est l'équation de Schrödinger non linéaire sur $\mathbb{R}^2_{x,y}$ dans laquelle le laplacien est remplacé par l'opérateur de Grushin $G := \partial_x^2 + x^2\partial_y^2$. Comme précédemment, l'équation de Szegö apparait naturellement dans l'analyse. Pour plus de détails on renvoie à [35].

1.1.4 Une équation des ondes non linéaire

Un troisième exemple qui motive l'introduction de l'équation de Szegö est l'équation d'onde non linéaire suivante :

$$i\partial_t u - Au = |u^2|u,$$

où $A = |D_{x_1}| + |D_{x_2}|$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le hamiltonien de cette équation est

$$E = (Au, u)_{L^2} + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4$$

et il a le même scaling que l'espace $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2)$. Une condition nécessaire pour avoir un flot régulier par rapport à la donnée initiale dans $\dot{H}^r(\mathbb{R}^2)$ est cette fois donnée par :

$$\|e^{-itA}u_0\|_{L^4([0,1]\times\mathbb{R}^2)} \leq C_r\|u_0\|_{H^{r/2}(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.1.3}$$

On considère la décomposition suivante de $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$L^2(\mathbb{R}^2) := \sum_{\sigma\in\{-1,1\}^2} L^2_\sigma(\mathbb{R}^2),$$

où

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^2) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^2)\middle| \operatorname{supp}\hat{f} \subset \{(\xi_1,\xi_2), \sigma_1\xi_1 \geq 0, \sigma_2\xi_2 \geq 0\}\right\}.$$

On observe que si $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$, alors $e^{-itA}u_0(x_1,x_2) = u_0(x_1-\sigma_1 t, x_2-\sigma_2 t)$. Ensuite, en utilisant l'inclusion de Sobolev, on obtient que (1.1.3) est vraie seulement lorsque $r \geq 1$. En conclusion, il existe une perte d'une demi-dérivée à cause du manque de dispersion. Le système formé par quatre équations de transport, obtenu en projetant l'équation sur les sous-espaces de $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$ suggère de nouveau l'étude de l'équation de Szegö.

Si on remplace l'opérateur A par $|D| := \sqrt{|D_{x_1}|^2 + |D_{x_2}|^2}$, on obtient l'équation suivante sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} i\partial_t u - |D|u = |u|^2 u, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{NLW}$$

et les deux analyses coïncident. Une équation intermédiaire entre l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$ et (NLW) sur $\mathbb{R}^2$ est (NLW) sur $\mathbb{R}$.

1.2 Une présentation générale de l'équation de Szegö sur la droite réelle

On considère l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$ défini par

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \operatorname{supp}\hat{f} \subset [0,\infty)\}.$$

On définit l'espace de Sobolev correspondant $H^s_+(\mathbb{R}) = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_+(\mathbb{R})$, pour $s \geq 0$ et d'une manière similaire l'espace de Sobolev homogène correspondant. On introduit le projecteur de Szegö $\Pi_+ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ comme étant le projecteur sur les fréquences positives ou nulles,

$$\Pi_+(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

On pose aussi $\Pi_- = I - \Pi_+$. Quand il n'y a aucune confusion on écrit Π au lieu de Π_+ pour simplifier les notations. Pour $u \in L^2_+(\mathbb{R})$, on considère *l'équation de Szegö sur la droite réelle* :

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1.2.1}$$

Si l'on munit L^2_+ de la forme symplectique $\omega(u,v) = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} u\bar{v}$, on obtient que l'équation de Szegö est l'évolution hamiltonienne associée à l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx$$

définie sur $L^4_+(\mathbb{R})$. Cette structure implique la conservation formelle de l'énergie $E(u(t)) = E(u(0))$. L'invariance par rapport aux modulations et aux translations fournit deux autres lois de conservation, celle de la masse $Q(u(t)) = Q(u(0))$ et celle de l'impulsion $M(u(t)) = M(u(0))$, où l'on pose

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx \quad \text{et} \quad M(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{u} Du \, dx, \quad \text{avec } D = -i\partial_x.$$

En observant que $Q(u) + M(u) = \|u\|^2_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})}$, on obtient $\|u(t)\|_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})} = \|u(0)\|_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})}$. Par suite, $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$ est un espace naturel dans lequel on peut étudier si l'équation de Szegö est bien-posée.

Theorem 1.2.1. *L'équation de Szegö cubique* (1.2.1) *est globalement bien posée dans $H^s_+(\mathbb{R})$ pour $s \geq \frac{1}{2}$.*

La propriété la plus importante de l'équation de Szegö est le fait qu'elle est complètement intégrable au sens où elle possède une paire de Lax. On commence par introduire deux classes d'opérateurs sur $L^2_+(\mathbb{R})$: *les opérateurs de Hankel et de Toeplitz*. La paire de Lax est donnée en terme de ces opérateurs dans la Proposition 1.2.2.

Un opérateur de Hankel $H_u : L^2_+(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ de symbole $u \in H^{1/2}_+(\mathbb{R})$ est défini par

$$H_u(h) = \Pi_+(u\bar{h}).$$

Alors, comme on le démontre dans le Lemme 3.3.5, H_u est un opérateur de Hilbert-Schmidt $\mathbb{C}$-anti-linéaire. De plus, l'opérateur H_u^2 est un opérateur linéaire, à trace et auto-adjoint.

Un objet important dans l'étude des opérateurs de Hankel est l'opérateur de shift, défini par la multiplication par e^{ix} (la multiplication par la variable complexe z sur $\mathbb{T}$). En effet, en notant par T_α la multiplication par $e^{i\alpha x}$, un opérateur borné H sur $L^2_+(\mathbb{R})$ est un opérateur de Hankel si et seulement si

$$HT_\alpha = T_\alpha^* H \text{ pour tout } \alpha > 0.$$

Un opérateur de Toeplitz $T_b : L^2_+(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ de symbole $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ est défini par

$$T_b(h) = \Pi_+(bh).$$

Alors, T_b est $\mathbb{C}$-linéaire et borné. De plus, T_b est auto-adjoint si et seulement si b est à valeurs réelles.

Proposition 1.2.2. *Soit $u \in C(\mathbb{R}; H^s_+)$ pour $s > \frac{1}{2}$. L'équation de Szegö cubique* (1.2.1) *est équivalente à l'équation d'évolution suivante :*

$$\frac{d}{dt} H_u = [B_u, H_u],$$

où

$$B_u = \frac{i}{2} H_u^2 - i T_{|u|^2}.$$

En d'autres termes, la paire (H_u, B_u) est une paire de Lax pour l'équation de Szegö cubique sur la droite réelle.

D'après la théorie classique développée par Lax [58], une conséquence directe de la proposition ci-dessus est le corollaire suivant.

Corollary 1.2.3. *Soit $U(t)$ l'opérateur sur $L^2_+(\mathbb{R})$ défini par :*

$$\frac{d}{dt} U(t) = B_{u(t)} U(t), \qquad U(0) = I.$$

Alors, $U(t)$ est un opérateur unitaire et si u est une solution de l'équation de Szegö (1.2.1) *de donnée initiale u_0, on obtient :*

$$H_{u(t)} = U(t) H_{u_0} U(t)^*. \tag{1.2.2}$$

En particulier, ceci montre que le rang et le spectre de $H_{u(t)}$ sont conservés par le flot de l'équation de Szegö.

Il existe donc une suite infinie de lois de conservation. Plus précisément, on a le corollaire suivant

Corollary 1.2.4. *On définit $J_n(u) := (u, H_u^{n-2} u)$ pour tout $n \geq 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les quantités $J_{2k}(u)$ sont des quantités conservées pour l'équation de Szegö. En particulier, $J_2(u) = Q(u)$, $J_4(u) = \frac{E(u)}{2}$ et l'on récupère ainsi les lois de conservation de la masse et de l'énergie.*

On démontre que $J_{2k}(u) \leq \|u\|^{2k}_{H^{1/2}_+}$. La loi de conservation de la norme $H^{1/2}_+$ est donc plus forte que toutes les lois de conservation J_{2k} avec $k \in \mathbb{N}^*$.

1.3 Une brève présentation de l'équation des ondes non linéaire (NLW)

On considère l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{NLW}$$

où $D = -i\partial_x$. C'est en effet une équation des ondes non linéaire car si l'on applique l'opérateur $i\partial_t + |D|$ aux deux membres de l'équation, on obtient

$$-\partial_{tt}v + \Delta v = |v|^4 v + 2|v|^2(|D|v) - v^2(|D|\bar{v}) + |D|(|v|^2 v).$$

On remarque tout d'abord que l'équation (NLW) est non-dispersive parce que, si l'on la projette sur des fréquences positives/négatives, on obtient le système suivant d'équations de transport :

$$\begin{cases} i(\partial_t v_+ + \partial_x v_+) = \Pi_+(|v|^2 v) \\ i(\partial_t v_- - \partial_x v_-) = \Pi_-(|v|^2 v). \end{cases}$$

L'équation (NLW) est hamiltonienne d'énergie

$$E(v) = \frac{1}{2}(|D|v, v) + \frac{1}{4}\|v\|_{L^4}^4.$$

Cette structure montre que, au moins formellement, l'énergie est conservée : $E(v(t)) = E(v(0))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'invariance par rapport aux translations et aux modulations fournit deux autres lois de conservation : $Q(v(t)) = Q(v(0))$ et $M(v(t)) = M(v(0))$, où

$$Q(v) = \|v\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad M(v) = (Dv, v).$$

La conservation de la masse et de l'énergie implique que la norme $H^{1/2}$ de la solution de (NLW) est uniformément bornée en temps. Donc $H^{1/2}$ est un espace naturel pour étudier si l'équation (NLW) est bien posée.

Proposition 1.3.1. *L'équation des ondes non linéaire* (NLW) *est globalement bien posée dans $H^{1/2}(\mathbb{T})$ ainsi que dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$. De plus, si $v_0 \in H^s$ pour $s > \frac{1}{2}$, alors $v \in C(\mathbb{R}; H^s)$.*

1.4 Résultats concernant l'équation de Szegö

L'équation de Szegö a été introduite et étudiée dans [34, 35, 36, 37] sur $\mathbb{T}$. Une grande partie de ma thèse concerne l'étude de cette équation sur $\mathbb{R}$. A cause des problèmes spectraux, de la perte de compacité des inclusions de Sobolev, de la difficulté de caractériser les opérateurs de Hankel en utilisant l'opérateurs de shift e^{ix} et des problèmes liés aux petits diviseurs, l'étude de cette équation sur $\mathbb{R}$ offre des nouveaux phénomènes à comprendre. On énonce à présent très brièvement les résultats obtenus dans cette thèse concernant l'équation de Szegö.

Dans le Chapitre 3, on classifie tous les solitons de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$ et l'on démontre qu'ils sont orbitalement stables, ce qui signifie que si la donnée initiale est proche de celle d'un soliton, alors pour tout temps, la solution correspondante reste proche du soliton modulo les isométries de l'espace.

Dans le Chapitre 4, on trouve une formule explicite pour la solution de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$. Cette formule nous permet de démontrer que les solutions "génériques" s'écrivent comme une somme de solitons et d'un reste petit quand le temps tend vers $\pm\infty$. Pour ce qui est des données non génériques, on construit un exemple pour lequel la résolution en solitons est vraie dans H^s, $0 \leq s < 1/2$, tandis que les grandes normes de Sobolev tendent vers l'infini en temps, i.e. $\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t)\|_{H^s} = \infty$, $s > 1/2$. La formule explicite nous permet aussi d'introduire des coordonnées action-angle généralisées si l'on se restreint à une sous-variété de l'espace de Hardy de dimension finie. Par conséquent, la plupart des solutions de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$ ont une trajectoire en forme de spirale autour d'un cylindre toroïdal $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$.

L'étude de ces problèmes a été motivée par des résultats similaires qui ont été obtenus pour d'autres équations complètement intégrables comme NLS cubique en dimension un, KdV et mKdV. Ces équations ont été résolues par la méthode de scattering inverse [2, 23, 32], qui a aussi donné la résolution en solitons pour des données "génériques" [26, 70].

Dans ce qui suit, on décrit plus rigoureusement les résultats énoncés ci-dessus. On les compare aussi avec des résultats déjà existants à propos de l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$, NLS et KdV. On décrit brièvement les particularités de chaque preuve ainsi que les difficultés rencontrées.

1.4.1 Classification des solitons de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$

On dit qu'une solution de l'équation de Szegö est un *soliton* s'il existe une fonction u_0 et $c, \omega \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$u(t,x) = e^{-i\omega t} u_0(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Theorem 1.4.1 ([75]). *Une fonction $u \in C(\mathbb{R}, H_+^{1/2}(\mathbb{R}))$ est un soliton si et seulement si c'est une fonction rationnelle avec un seul pôle simple :*

$$u(t,x) = \frac{Ce^{-i\omega t}}{x - ct - p},$$

où $c = c(C,p)$, $\omega = \omega(C,p)$ et $\mathrm{Im} p < 0$.

Une classification des solitons de l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$ est disponible dans [35]. Les solitons sont dans ce cas, toutes les fonctions rationnelles $\frac{z^\ell}{z^N - p^N}$, où $|p| > 1$, $\ell = 1, 2, \ldots, N-1$ ainsi que tous les produits de Blaschke finis (donnés par la formule (1.4.1) ci-dessous). Une comparaison immédiate de ces deux résultats montre qu'il existe beaucoup moins de solitons dans le cas de $\mathbb{R}$ que dans le cas de $\mathbb{T}$.

Contrairement à son énoncé très court, la preuve du Théorème 1.4.1 combine plusieurs arguments provenant de domaines divers de l'analyse comme la théorie spectrale, l'analyse complexe et la théorie des systèmes dynamiques complètement intégrables. La preuve contient deux parties principales :

- Les solitons sont des fonctions rationnelles.

Sur $\mathbb{T}$, cette affirmation est une conséquence directe du fait que l'opérateur $A_u := D - \frac{1}{c} T_{|u|^2}$ a une résolvante compacte et n'a donc qu'un spectre discret, ce qui découle de l'inclusion de Sobolev compacte $H^1(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$. Par contre, sur $\mathbb{R}$, cette inclusion n'est plus compacte et l'opérateur A_u a aussi un spectre continu. La partie du spectre de A_u qui nous intéresse le plus est le spectre absolument continu. Pour l'étudier, on prouve d'abord l'existence et la complétude des opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}(D, A_u)$, où $D = -i\partial_x$. Les opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}(D, A_u)$ réalisent une comparaison entre les dynamiques induites par e^{-itD} et e^{-itA_u} quand $t \to \mp\infty$. En particulier, leur existence et leur complétude montrent que le spectre absolument continu de A_u coïncide avec celui de D, donc avec $[0, \infty)$. Pour plus de détails concernant les opérateurs d'ondes, on renvoie à la section 2.2.4 des préliminaires.

Un autre élément important de la preuve est un théorème de type Kronecker (Théorème 2.1.7) qui caractérise les opérateurs de Hankel de rang fini (on rappelle que les opérateurs de Hankel sont compacts). Ce théorème affirme que l'opérateur de Hankel H_u est de rang fini si et seulement si u est une fonction rationnelle dans $L^2_+(\mathbb{R})$. Pour démontrer que le soliton u est une fonction rationnelle, il suffit donc de démontrer que $\dim(\mathrm{Ran} H_u) < \infty$. Dans la preuve, on reformule ceci en termes de propriétés pour $\mathrm{Ker}\, H_u$. Ce noyau est invariant par rapport à la multiplication par $e^{i\alpha x}$, pour tout $\alpha > 0$. Un théorème de Lax (Théorème 2.1.6) concernant de tels sous-espaces invariants, montre alors que $\mathrm{Ker}\, H_u = \phi L^2_+(\mathbb{R})$, où ϕ est une fonction intérieure, c'est à dire une fonction holomorphe bornée dans le demi-plan supérieur et dont la valeur au bord est de valeur absolue 1. En utilisant les propriétés des fonctions intérieures, on démontre que ϕ est en fait égale à un produit de Blaschke fini :

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^{N} \frac{x-\lambda_j}{x-\bar{\lambda}_j}, \text{ où } \operatorname{Im}(\lambda_j) > 0. \tag{1.4.1}$$

On en déduit que $\operatorname{Ran}(H_u)$ est engendré par $\left\{\frac{1}{x-\bar{\lambda}_j}\right\}_{j=1}^{N}$ et donc que H_u est de rang fini, ce qui prouve que le soliton u est une fonction rationnelle. Notons que, sur $\mathbb{T}$, aucune des techniques que l'on vient de décrire n'est nécessaire.

- Les solitons ont un seul pôle et celui-ci est simple.

Dans le cas de $\mathbb{T}$, on montre ce résultat en utilisant l'opérateur de shift T_z donné par la multiplication par la variable complexe z, qui commute avec l'opérateur de Hankel : $H_u T_z = T_z^* H_u$. Dans le cas de $\mathbb{R}$, il est difficile de travailler avec le semi-groupe d'opérateurs de shift T_α donnés par la multiplication par $e^{i\alpha x}$, qui satisfont $H_u T_\alpha = T_\alpha^* H_u$ pour tout $\alpha > 0$. C'est pourquoi l'on introduit *l'opérateur de shift infinitésimal compressé* T qui correspond à "la multiplication par x". C'est le générateur infinitésimal du semi-groupe $P_u T_\alpha$, où P_u est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ran} H_u$. Il satisfait la même relation de commutation $H_u T = T^* H_u$, mais l'on doit faire attention lorsque l'on manipule cet opérateur : en effet, la multiplication par x est un opérateur non borné sur $L^2_+(\mathbb{R})$.

1.4.2 Stabilité orbitale des solitons de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$

Theorem 1.4.2 ([75]). *Les solitons de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$ sont orbitalement stables. Plus précisément, pour $a, r > 0$, on considère le cylindre*

$$C(a,r) = \left\{ \frac{\alpha}{z-p}; |\alpha| = a, \ \operatorname{Im} p = -r \right\},$$

qui est une sous-variété de la variété des solitons. Si la suite des données initiales $\{u_0^n\} \subset H_+^{1/2}$ est proche du cylindre $C(a,r)$, alors la suite correspondante des solutions $\{u^n\}$, reste proche de $C(a,r)$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}$.

La preuve du Théorème 1.4.2 est basée sur des techniques variationnelles. La première étape est d'observer que les solitons $u = \frac{C}{x-p}$, $\operatorname{Im} p < 0$ sont des minimiseurs dans une inégalité de Gagliardo-Nirenberg de la forme

$$\|u\|_{L^4_+}^4 \le \frac{1}{\pi} \|u\|_{L^2_+}^2 \|u\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2.$$

Notons que, sur $\mathbb{T}$, les solitons $\frac{1}{z-p}$ avec $|p| > 1$, sont aussi orbitalement stable [35]. Dans ce cas-là, l'argument variationnel présenté ci-dessus et le théorème de compacité de Rellich sont suffisants pour conclure. Malheureusement, un tel théorème de compacité n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, sur $\mathbb{R}$, on utilise la *concentration-compacité*, introduite par Lions [61, 60]. Plus précisément, on applique un théorème de *décomposition en profils* pour des suites bornées dans $H_+^{1/2}(\mathbb{R})$, dans l'esprit des travaux de Gérard [33] et Hmidi et Keraani [47]. Ce théorème affirme que toute suite bornée dans $H_+^{1/2}(\mathbb{R})$ s'écrit comme une superposition presque orthogonale des translations des profils fixes et d'un reste qui tend vers zéro dans toutes les normes $L^p(\mathbb{R})$, $p \in (2, \infty)$. Pour un énoncé plus précis, on renvoie au Théorème 2.4.5 des préliminaires.

On remarque que tous les solitons pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$, à l'exception de ceux qui sont de la forme $\frac{1}{z-p}$ avec $|p| > 1$, sont instables [36].

1.4.3 Formule explicite de la solution de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$

On considère d'abord le cas d'une donnée initiale u_0 pour laquelle l'opérateur de Hankel H_{u_0} est de rang fini. Les opérateur de Hankel de rang fini sont denses dans la classe des opérateurs de Hankel, les opérateurs de Hankel étant tous compacts. Un théorème de type Kronecker (Théorème 2.1.7) affirme que H_{u_0} est de rang fini N si et seulement si u_0 est une fonction rationnelle appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}(N)$ défini par

$$\mathcal{M}(N) = \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \in L^2_+ \middle| \deg(B) = N,\ \deg(A) \leq N-1,\ B(0) = 1,\ \mathrm{pgcd}(A, B) = 1 \right\}.$$

Si $u_0 \in \mathcal{M}(N)$, le corollaire 1.2.3 assure alors que $\mathrm{rk}\, H_{u(t)} = \mathrm{rk}\, H_{u_0} = N$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le théorème de type Kronecker implique donc dans ce cas que $u(t) \in \mathcal{M}(N)$. Par conséquent, la première information que l'on détient est que si la donnée initiale est une fonction rationnelle, alors la solution reste une fonction rationnelle pour tout temps. Il s'avère que l'on peut trouver une formule explicite de la solution, comme on l'énonce dans le théorème suivant. On fixe d'abord quelques notations.

Supposons que $u_0 \in \mathcal{M}(N)$. Il existe alors $g_0 \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$ tel que $H_{u_0} g_0 = u_0$. Notons par $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_N^2$ les valeurs propres de $H_{u_0}^2$ tel que $\lambda_j > 0$. Comme, par le Lemme 3.3.6, on a $\mathrm{Ran}(H_{u_0}) = \mathrm{Ran}(H_{u_0}^2)$, on peut choisir une base orthonormale complexe $\{e_j\}_{j=1}^N$ de $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ formée de vecteurs propres de $H_{u_0}^2$ vérifiant $H_{u_0} e_j = \lambda_j e_j$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, N$. Posons aussi $\beta_j = (g_0, e_j)$.

Theorem 1.4.3 (Formule explicite pour les solutions qui ont comme conditions initiales des fonctions rationnelles [76])**.** *Supposons que* $u_0 \in \mathcal{M}(N)$ *et notons*

$W(t) = e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}$. *On définit l'opérateur de shift infinitésimal compressé* $T : \mathrm{Ran}(H_{u_0}) \to \mathrm{Ran}(H_{u_0})$ *par :*

$$Tf(x) := xf - \big(\lim_{x\to\infty} xf(x)\big)(1-g_0). \tag{1.4.2}$$

On introduit un opérateur $S(t)$ *qui agit de la manière suivante sur* $\mathrm{Ran}\, H_{u_0}$. *On fixe* $j \in \{1,\dots,N\}$ *et on note* $M_j \subset \mathbb{N}$ *l'ensemble de tous les indices* k *tels que* $H_{u_0}e_k = \lambda_j e_k$. *L'opérateur* $S(t)$ *est défini dans la base* $\{e_j\}_{j=1}^N$ *par la matrice* $(S(t)_{k,j})_{k,j}$, *où l'on pose :*

$$S(t)_{k,j} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{2\pi i(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\Big(\lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\overline{\beta}_j\beta_k - \lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_k^2)}\beta_j\overline{\beta}_k\Big), & si\ k \in \{1,\dots,N\}\setminus M_j, \\ \frac{\lambda_j^2}{2\pi}\overline{\beta}_j\beta_k t + (Te_j, e_k), & si\ k \in M_j. \end{cases}$$

La formule suivante définit alors la solution de l'équation de Szegö :

$$u(t,x) = \frac{i}{2\pi}\Big(u_0, W(t)(S(t)-xI)^{-1}W(t)g_0\Big)_{L^2} \text{ pour tout } \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}. \tag{1.4.3}$$

Ce théorème est dans l'esprit de la méthode de scattering inverse. Cependant, contrairement au cas d'autres équations complètement intégrables comme NLS cubique en dimension un et KdV, cette méthode n'est pas nécessaire pour résoudre l'équation de Szegö. Plus précisément, la compacité de l'opérateur de Hankel H_u implique qu'il n'a pas de spectre continu et permet donc de résoudre directement le problème spectral inverse pour H_u, sans passer par la méthode de scattering inverse.

Le rôle principal dans la preuve du Théorème 1.4.3 est naturellement joué par la paire de Lax. Un élément clé est la relation de commutation entre les opérateurs de Hankel et l'opérateur de shift infinitésimal $T^*H_u = H_uT$. On observe ici que l'opérateur T est défini dans (1.4.2) par la multiplication d'une fonction rationnelle f par x en soustrayant ensuite grosso modo la constante $\lim_{x\to\infty} xf(x)$, qui est la seule chose qui empêche $xf(x)$ d'appartenir à $L^2(\mathbb{R})$. On termine alors la preuve par le calcul des commutateurs de l'opérateur de shift infinitésimal T avec des opérateurs de Hankel et de Toeplitz.

Comme $\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}\mathcal{M}(N)$ est dense dans $L^2_+(\mathbb{R})$, on peut traiter le cas d'une solution à donnée initiale générale dans $L^2_+(\mathbb{R})$ par un argument d'approximation. On fixe d'abord quelques notations.

Soit $u_0 \in L^2_+(\mathbb{R})$. Comme $H_{u_0}^2$ est un opérateur linéaire compact, on note $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$ la suite de ses valeurs propres positives. Choisissons une base orthonormale complexe $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ de $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ formée de vecteurs propres de $H_{u_0}^2$ vérifiant $H_{u_0}e_j = \lambda_j e_j$ pour tout $j\in\mathbb{N}^*$ et posons $\beta_j = \frac{1}{\lambda_j}(e_j, u_0)$.

Theorem 1.4.4 (Formule explicite de la solution à donnée initiale générale [76]). *Soit $u_0 \in H^s_+$, $s \geq 1$ telle que $xu_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Notons $W(t) = e^{i\frac{t}{2}H^2_{u_0}}$. On définit l'opérateur T^* :* $\mathrm{Ran}(H_{u_0}) \to \mathrm{Ran}(H_{u_0})$ *par*

$$T^*(H_{u_0}f) := \Pi_+(xu_0f). \tag{1.4.4}$$

On introduit un opérateur $S^*(t)$ qui agit de la manière suivante sur $\mathrm{Ran}\, H_{u_0}$. *On fixe $j \in \{1, \dots, N\}$ et on note $M_j \subset \mathbb{N}$ l'ensemble de tous les indices k tels que $H_{u_0}e_k = \lambda_j e_k$. L'opérateur $S^*(t)$ est défini dans la base $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ par :*

$$(S^*(t)e_j, e_k) = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{2\pi i(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\Big(\lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\overline{\beta}_j\beta_k - \lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_k^2)}\beta_j\overline{\beta}_k\Big), & si\ k \in \mathbb{N}\setminus M_j, \\ \frac{\lambda_k^2\overline{\beta}_j\beta_k}{2\pi}t + (T^*e_j, e_k), & si\ k \in M_j. \end{cases}$$

Si A est la fermeture de S^* dans $L^2_+(\mathbb{R})$, on a alors la formule suivante pour la solution de l'équation de Szegö :

$$u(t,z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{2\pi}\Big(W^*(t)(A - zI)^{-1}W^*(t)u_0, \frac{1}{1-i\varepsilon z}\Big),$$

pour $\mathrm{Im} z > 0$.

On remarque d'abord que u_0 n'appartient pas toujours à $\mathrm{Ran} H_{u_0}$, comme c'était le cas pour les fonctions rationnelles, où l'on avait $u_0 = H_{u_0}g_0$. Par conséquent, il est nécessaire de trouver une fonction qui remplace g_0 dans la formule (1.4.3). On peut démontrer que pour tout $u_0 \in L^2_+(\mathbb{R})$ on a $u_0 \in \overline{\mathrm{Ran} H_{u_0}}$, et que de plus, si $u_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$ avec $s \geq 1$ et $xu_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $u_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} H_{u_0}(\frac{1}{1-i\varepsilon x})$.

Le fait que la dernière égalité soit vraie pour u_0 reste tout de même insuffisant. Comme on veut obtenir une formule pour $u(t)$, il est nécessaire que cette propriété soit vraie pour tout $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$. En utilisant un argument de point fixe, on démontre que $u(t) \in H^s_+(\mathbb{R})$ avec $s \geq 1$ et $xu(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci entraine que $u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_{u(t)}(\frac{1}{1-i\varepsilon x})$, et donc que la fonction qui remplace g_0 dans la formule (1.4.3) est $\frac{1}{1-i\varepsilon x}$.

Le point le plus délicat dans la preuve du Théorème 1.4.4 est la définition de l'opérateur de shift infinitésimal T, qui devrait être " la multiplication par x". Il n'est plus suffisant de multiplier par x et ensuite de soustraire une "constante", comme dans le cas des fonctions rationnelles (1.4.2). Cependant, même si l'on ne sait pas définir T directement, on arrive à définir "l'adjoint" de T par $T^*(H_{u_0}f) = \Pi_+(xu_0f)$ comme dans l'équation (1.4.4). Si $f \in L^2_+(\mathbb{R})$ et $xu_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a alors $xu_0f \in L^2(\mathbb{R})$, et la définition ci-dessus a donc un sens. Ceci explique l'apparition de l'opérateur $S^*(t)$ plutôt que celle de $S(t)$ dans le Théorème 1.4.4.

Une formule explicite de la solution de l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$ est obtenue dans [36] comme conséquence de l'introduction des coordonnées action-angle. On discutera plus tard, lorsqu'il sera question des coordonnées action-angle généralisées pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$, des similarités et des différences entre les formules donnant la solution sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{T}$.

Dans ce qui suit, on présente deux applications de la formule explicite de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$. Pour des solutions qui sont des fonctions rationnelles génériques, on démontre qu'elles sont des superpositions des solitons et d'un reste quand le temps tend vers $\pm\infty$. Pour des solutions non génériques, on trouve un exemple pour lequel les grandes normes de Sobolev croissent vers l'infini en temps.

1.4.4 Résolution en solitons pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$

Une donnée initiale $u_0 \in \mathcal{M}(N)$ est dite *fortement générique* si l'opérateur $H_{u_0}^2$ a *ses valeurs propres non nulles simples* $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots < \lambda_N^2$ avec $(u_0, e_j) \neq 0$, pour tout $j = 1, 2, \ldots, N$ et $|(u_0, e_j)| \neq |(u_0, e_k)|$ pour tout $k \neq j$. On note $\mathcal{M}(N)_{\mathrm{sgen}}$ l'ensemble des fonctions fortement génériques ("strongly generic").

Theorem 1.4.5 ([76]). *Soit $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\mathrm{sgen}}$ une donnée initiale fortement générique pour l'équation de Szegö. Alors, la solution correspondante s'écrit comme une somme de N solitons et d'un reste. Plus précisément, on a*

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{C_j e^{-i\omega_j t}}{x - c_j t - p_j} + \varepsilon(t,x),$$

où $\lim_{t\to\pm\infty} \|\varepsilon(t,x)\|_{H_+^s(\mathbb{R})} = 0$ *pour tout* $s \geq 0$.

La résolution en solitons est valable pour d'autres équations complètement intégrables comme KdV [26] et NLS cubique en dimension un [70]. Pour KdV, la résolution en solitons a lieu dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, dans le sens où $\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = 0$. Par contre, $\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}$ n'est pas nécessairement égale à zéro. Ceci montre que, contrairement au cas de l'équation de Szegö, le reste est une onde dispersée, qui peut cependant porter une partie de l'énergie initiale.

Pour NLS, la résolution en solitons a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$u(t,x) = \text{Solitons} + e^{it\Delta} f + \varepsilon(t,x),$$

où $\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon(t,x)\|_{L^2} = 0$.

Pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$, on n'a pas de résultat de résolution en solitons.

1.4.5 Croissance de grandes normes de Sobolev pour des solutions non génériques de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$

Theorem 1.4.6 ([76]). *L'équation de Szegö admet des solutions $u(t)$ dont les grandes normes de Sobolev $H^s_+(\mathbb{R})$ pour $s > 1/2$, croissent vers l'infini :*

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \to \infty \text{ quand } t \to \pm\infty.$$

Plus précisément, il existe une solution u de l'équation de Szegö avec une donnée initiale non générique u_0 telle que $H^2_{u_0}$ ait une seule valeur propre double et telle que $\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim |t|^{2s-1}$ pour $|t|$ suffisamment grand.

Le théorème précédent est une conséquence du caractère non-dispersif de l'équation de Szegö. Si on considère l'équation NLS sans dispersion, $iu_t = |u|^2u$, alors $u(t,x) = \phi(x)\exp(-i|\phi(x)|^2t)$. Si ϕ est régulier, alors $\|u(t)\|_{H^s} \sim |t|^s$ pour $s \in \mathbb{N}$. La situation est plus subtile pour l'équation de Szegö, à cause de la conservation de la norme $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$. En particulier, ceci explique pourquoi, pour l'équation de Szegö, seules les normes $H^s_+(\mathbb{R})$ avec $s > 1/2$ croissent vers l'infini.

Le Théorème 1.4.6 montre que l'énergie est supportée sur des fréquences de plus en plus hautes, tandis que la masse est supportée sur des basses fréquences. Ce phénomène s'appelle "forward cascade" et est compatible avec certaines prédictions faites dans la théorie de la turbulence faible ("weak turbulence theory").

Bourgain a construit dans [11] des solutions dont le supremum en temps des normes de Sobolev est infini. Il a tout de même considéré une équation des ondes non linéaire sur $\mathbb{T}$ avec un laplacien spectralement défini, de la forme B^2, où B est diagonal par rapport à la base des exponentielles et a des valeurs propres $\mu_n = \mu_{-n}$, $\mu_n = |n| + O(1)$. Dans [10], Bourgain a construit des solutions avec la même propriété pour une équation de Schrödinger non linéaire sur $\mathbb{T}$ avec une non linéarité petite et tronquée en fréquences. Récemment, Hani a construit dans sa thèse [45] le même type de solutions génériques de NLS sur $\mathbb{T}^2$ avec une non linéarité cubique tronquée.

Cependant, dans le cas des EDP hamiltoniennes générales (dispersives), un tel résultat n'est pas connu, mais il existe plusieurs résultats partiels dans cette direction. Dans [35, Corollary 5], Gérard et Grellier ont observé la croissances de grandes normes de Sobolev pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$. Cependant, leur construction d'une suite de solutions $u^\varepsilon(t^\varepsilon)$ dont les normes de Sobolev deviennent grandes dépend du paramètre petit ε. Dans [22], Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao ont construit une solution pour l'équation NLS cubique défocalisante sur $\mathbb{T}^2$ dont les grandes normes de Sobolev deviennent plus grandes que n'importe quelle constante fixée après un certain temps. Kuksin a considéré dans [56] le cas de l'équation NLS avec peu de dispersion, $-i\partial_t u + \delta\Delta u = |u|^2u$, [1] avec une condition au bord périodique et impaire, où

1. On remarque que cette équation peut être considérée comme une perturbation de l'équation

δ est un paramètre petit. Il a prouvé que les normes de Sobolev des solutions avec des données génériques et de masse unitaire deviennent plus grandes qu'une puissance négative de δ. Cependant, ces constructions ne donnent aucun exemple de solution telle que $\sup_t \|u(t)\|_{H^s} = \infty$.

Le point de départ de la preuve des Théorèmes 1.4.5 et 1.4.6 est la formule explicite de la solution dont on dispose pour des données initiales $u_0 \in \mathcal{M}(N)$. On sait déjà que la solution correspondante $u(t)$ est une fonction rationnelle et donc on peut d'abord écrire son développement asymptotique comme une somme de fractions simples : $u(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{C_j(t)}{x-p_j(t)} + O(\frac{1}{t})$. La remarque clé dans la preuve est le fait que les conjugués complexes des pôles $p_j(t)$ de $u(t)$ sont les valeurs propres de l'opérateur de shift infinitésimal T.

• Si $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$, alors pour tout j, on a $p_j(t) = a_j t + b_j + O(\frac{1}{t})$ quand $t \to \pm\infty$, avec $a_j \neq 0$, $a_j \neq a_k$, pour $j \neq k$, et $\operatorname{Im}(b_j) \neq 0$. Dans ce cas, on obtient la résolution en solitons dans $H^s_+(\mathbb{R})$ pour tout $s \geq 0$.

• Si u_0 est telle que $H^2_{u_0}$ a une seule valeur propre double, alors il existe p_{j_0} avec $p_{j_0}(t) = b_{j_0} + O(\frac{1}{t})$ quand $t \to \pm\infty$ et $\operatorname{Im}(b_{j_0}) = 0$. Par conséquent, un des pôles de $u(t)$ s'approche de la droite réelle, ce qui provoque la croissance de grandes normes de Sobolev.

1.4.6 Coordonnées action-angle généralisées pour l'équation de Szegö restreinte à des variétés de dimension finie $\mathcal{M}(N)$

Les coordonnées action-angle généralisées sont la généralisation au cas non-compact des coordonnées action-angle définies dans le théorème de Liouville-Arnold. On renvoie à la section 2.3.2 pour l'énoncé du théorème de Liouville-Arnold et de sa généralisation au cas non-compact.

Comme nous l'avons vu au début de la section 1.4.3, les sous-variétés $\mathcal{M}(N)$ sont invariantes par le flot de l'équation de Szegö. En restreignant l'équation de Szegö à $\mathcal{M}(N)$, on obtient un système complètement intégrable de dimension $4N$. On peut donc introduire explicitement des coordonnées action-angle généralisées pour ce système, formées de $2N$ actions invariantes par le flot et telles que le hamiltonien s'exprime exclusivement en termes d'actions, de N angles qui appartiennent au tore $\mathbb{T}$ et de N angles généralisés qui appartiennent à la droite réelle $\mathbb{R}$. Dans ces nouvelles coordonnées, l'équation de Szegö a alors une forme très simple et peut être intégrée facilement.

Une fonction $u \in \mathcal{M}(N)$ est dite *générique* si l'opérateur H^2_u a seulement des

NLS sans dispersion. On renvoie à [13, p.138] valeurs propres non nulles simples $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots < \lambda_N^2$ et si $(u, e_j) \neq 0$, pour tout $j = 1, 2, \ldots, N$. On note $\mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$ l'ensemble de telles fonctions génériques.

Theorem 1.4.7 ([76]). *Pour $u \in \mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$, on note $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots \lambda_N^2$ les valeurs propres de H_u^2 et $\{e_j\}_{j=1}^N$ une base orthonormale complexe de $\mathrm{Ran}(H_u)$ formée de vecteurs propres de H_u^2 tels que $H_u e_j = \lambda_j e_j$. Il existe un unique élément $g \in \mathrm{Ran}(H_u)$ tel que $u = H_u g$. Notons $\nu_j = |(g, e_j)|$, $\phi_j = \arg(g, e_j)$ et $\gamma_j = \mathrm{Re}\,(Te_j, e_j)$.*

Alors, $I_j = 4\lambda_j^2 \nu_j^2$, $\tilde{I}_j = 4\pi\lambda_j^2$, $\phi_j \in \mathbb{T}$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ sont des coordonnées action-angle généralisées. L'équation de Szegö s'écrit dans ces nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} I_j = 0 \\ \frac{d}{dt} \phi_j(t) = I_j \\ \frac{d}{dt} \tilde{I}_j = 0 \\ \frac{d}{dt} \gamma_j(t) = \tilde{I}_j. \end{cases}$$

De plus, les solutions de l'équation de Szegö avec des données initiales qui sont des fonctions rationnelles génériques ont des trajectoires en forme de spirale autour des cylindres toroïdaux $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$.

Pour l'équation KdV sur le tore $\mathbb{T}$, les coordonnées action-angle globales peuvent être trouvées par exemple dans le livre de Kappeler et Pöschel [52], la compacité permettant de ne pas avoir besoin d'angles généralisés. Pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{T}$, des coordonnées action-angle ont été introduites dans [36] sur un sous-ensemble G_δ de $L_+^2(\mathbb{T})$. La moitié des actions et des angles, $\tilde{I}_j, \phi_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, coïncide dans les deux analyses et est liée aux valeurs propres et aux fonctions propres de l'opérateur de Hankel H_u. Cependant, l'autre moitié est complètement différente. Dans le cas de $\mathbb{T}$, on considère un nouvel opérateur $K_u = H_u T_z$ dont les valeurs propres et les fonctions propres donnent le reste des coordonnées. Dans le cas de $\mathbb{R}$, les angles généralisés sont définis à l'aide de l'opérateur de shift infinitésimal T, spécifique au cas de la droite réelle, en posant $\gamma_j = \mathrm{Re}(Te_j, e_j)$.

La preuve du Théorème 1.4.7 suit la stratégie utilisée dans [36]. On considère l'application χ définie sur $\mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$ par $\chi(u) = (I_j, \tilde{I}_j, \phi_j, \gamma_j)$, qui est à valeurs dans $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^N \times \{0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N\} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. On prouve en plusieurs étapes que χ est un difféomorphisme symplectique, ce qui signifie que c'est un difféomorphisme tel que

$$\{I_j, \phi_k\} = \delta_{jk} \quad \{\tilde{I}_j, \gamma_k\} = \delta_{jk}$$

et que tous les autres crochets de Poisson sont nuls.

• χ est une application injective. Cette affirmation est équivalente à la résolution du problème spectral inverse pour l'opérateur de Hankel H_u. Par des calculs similaires à ceux permettant de retrouver la formule explicite de la solution de l'équation de Szegö, on obtient une formule pour u en termes de $I_j, \tilde{I}_j, \phi_j, \gamma_j$, ce qui montre que χ est injective.

• χ est un difféomorphisme local. Ceci revient à prouver que les différentielles $dI_j, d\tilde{I}_j, d\phi_j, d\gamma_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$ sont libres. On démontre cela facilement une fois que l'on a calculé une partie de crochets de Poisson, plus précisément $\{$action, angle$\}$ et $\{$action, angle généralisé$\}$. Cependant, il est difficile de calculer directement ces crochets de Poisson. Le point clé pour faire ce calcul est d'utiliser la hiérarchie de Szegö. C'est une suite infinie d'équations hamiltoniennes correspondant aux champs vectoriels des quantités conservées J_{2n} définies dans le Corollaire 1.2.4 :

$$\begin{cases} \partial_t u = X_{J_{2n}(u)} \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

On peut démontrer que $J_{2n}(u) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{2n} \nu_j^2 = C \sum_{j=1}^N I_j \tilde{I}_j^{n-1}$. Par conséquent, si l'on arrive à calculer $\{J_{2n}, \phi_j\}$ et $\{J_{2n}, \gamma_j\}$, on retrouve les crochets de Poisson désirés, à savoir $\{I_j, \phi_j\}$, $\{\tilde{I}_j, \phi_j\}$, $\{I_j, \gamma_j\}$, $\{\tilde{I}_j, \gamma_j\}$. Dans le but de calculer $\{J_{2n}, \phi_j\}$, on observe que

$$\{J_{2n}, \phi_j\} = \frac{d\phi_j}{dt}$$

est l'évolution de l'angle ϕ_j le long du flot de l'équation (1.4.5). (Une affirmation analogue est vraie pour l'angle généralisé γ_j.) Comme l'équation de Szegö, toutes les équations dans la hiérarchie de Szegö sont complètement intégrables et admettent une paire de Lax $(H_u, B_{u,n})$. Ceci nous permet de calculer $\frac{d\phi_j}{dt}$ et $\frac{d\gamma_j}{dt}$, et donc de retrouver $\{J_{2n}, \phi_j\}$ et $\{J_{2n}, \gamma_j\}$.

• χ est surjective, et est donc un difféomorphisme. On a déjà démontré que χ est un difféomorphisme local, d'où il résulte que χ est une application ouverte. Si l'on prouve que χ est aussi une application fermée, la connexité de Ω va impliquer que $\chi(\mathcal{M}(N)_{\text{gen}}) = \Omega$, et donc χ est surjective. Pour démontrer que χ est fermée, on prouve qu'elle est propre, ce qui signifie que la pré-image de tout sous-ensemble compact de Ω par χ est compacte.

La preuve utilise de nouveau les quantités $J_{2n}(u)$ ainsi que le fait que $\|u\|^2_{\dot{H}_+^{1/2}} = 2\pi \mathrm{Tr}(H_u^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \tilde{I}_j$. Si, dans le cas de $\mathbb{T}$, on utilise un lemme abstrait de théorie spectrale, la preuve dans le cas de $\mathbb{R}$ utilise simplement la formule que l'on a trouvée pour u dans l'étape où l'on a démontré l'injectivité de χ.

• χ est une transformation symplectique. Ceci revient à prouver que les crochets de Poisson $\{\phi_j, \phi_k\}$, $\{\phi_j, \gamma_k\}$ et $\{\gamma_j, \gamma_k\}$ sont nuls. Pour le premier, on procède comme dans le cas de $\mathbb{T}$. On considère $\{J_1, J_3\}$, où $J_1(u) = (u, g)$ et $J_3(u) = (H_u^2 u, g)$. On calcule d'abord la valeur de ce crochet en utilisant les définitions ci-dessus de J_1 et J_3. Deuxièmement, on la calcule en utilisant le fait que $J_1 = \sum_{j=1}^N \lambda_j \nu_j^2 e^{-2i\phi_j}$ et

$J_3 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^3 \nu_j^2 e^{-2i\phi_j}$. En identifiant les deux expressions on obtient que $\{\phi_j, \phi_k\} = 0$. Pour calculer les deux derniers crochets de Poisson, on procède de façon similaire en calculant $\{A, C\}$, où $A = (Tu, u)$ et $C = (Tu, g)$. Ce choix est différent de celui réalisé dans le cas de $\mathbb{T}$ parce que les angles généralisés sont choisis d'une manière différente qui fait intervenir l'opérateur de shift infinitésimal T.

Remarquons que dans le cas de $\mathbb{T}$, les coordonnées action-angle ont été prolongées pour des fonctions qui ne sont pas nécessairement rationnelles. Comme les inclusions de Sobolev ne sont pas compactes sur $\mathbb{R}$, et comme on ne sait pas caractériser les conditions $u_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$, $s > 1/2$ et $xu_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, dans l'hypothèse du Théorème 1.4.4, uniquement en termes de données spectrales, on n'a pas pu étendre le Théorème 1.4.7 au cas des fonctions qui ne sont pas rationnelles.

1.5 Résultats concernant les perturbations de l'équation de Szegö

Dans le Chapitre 5 on s'intéresse à l'équation des ondes non linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{NLW}$$

sur $\mathbb{R}$ et aussi sur $\mathbb{T}$. Sur $\mathbb{R}$, on prouve que si la donnée initiale est petite est entièrement supportée sur des fréquences positives ou nulles, alors la solution correspondante est proche de celle de l'équation de Szegö avec la même donnée initiale, pour un temps long (approximation de premier ordre). Comme corollaire, on donne un exemple de solution de l'équation (NLW) pour laquelle les normes de Sobolev croissent en temps relativement à la norme de la donnée initiale. Un résultat similaire d'approximation a été prouvé dans [37] sur $\mathbb{T}$. On améliore ce résultat en trouvant une approximation de deuxième ordre de (NLW) sur $\mathbb{T}$, qui fournit une erreur plus petite. Celle-ci est donnée par une équation plus compliquée que celle de Szegö.

Dans le Chapitre 6 on étudie l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$ perturbée par un petit potentiel de Toeplitz $\varepsilon T_b u$, où $T_b u = \Pi_+(bu)$:

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u) + \varepsilon T_b u \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{TSZ}$$

On montre que, si la donnée initiale est celle d'un soliton pour l'équation de Szegö, alors la solution correspondante est proche d'une fonction qui a la forme d'un soliton et pour laquelle on peut prescrire les dynamiques effectives pour un temps long.

1.5.1 L'équation de Szegö comme première approximation de l'équation des ondes non linéaire (NLW) sur $\mathbb{R}$

Si la donnée initiale est de l'ordre de $O(\varepsilon)$ et entièrement supportée sur des fréquences positives, alors la solution correspondante de l'équation (NLW) sur $\mathbb{R}$ peut être approximée par celle de l'équation de Szegö avec une erreur de l'ordre de $O(\varepsilon^{2-})$ et pour un temps $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, où $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour que cette affirmation soit vraie, on doit en plus imposer une borne sur la norme de Sobolev de la solution de l'équation de Szegö : $\|\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq C\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Theorem 1.5.1 ([78])**.** *Soient* $0 < \varepsilon \ll 1$, $s > \frac{1}{2}$ *et* $W_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$. *Soit* $v(t)$ *la solution de l'équation* (NLW) *sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = \mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0. \end{cases}$$

Notons $\mathcal{W} \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{R}))$ *la solution de l'équation de Szegö sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t \mathcal{W} = \Pi_+(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}) \\ \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0, \end{cases}$$

avec la même donnée initiale. Supposons qu'il existe $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ *et* $\delta > 0$ *suffisamment petit de sorte que* $\|\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq C\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Alors, si $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, *on a*

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq C_* \varepsilon^{2-C_0\delta},$$

où $C_0 > 0$ *est une constante absolue et* C_* *est une constante qui dépend seulement de la norme* $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$ *de* W_0.

L'intérêt du Théorème 1.5.1 est de fournir des résultats pour l'équation (NLW) à partir des résultats que l'on connait pour l'équation de Szegö. On a mis en évidence dans le Théorème 1.4.6, des solutions de l'équation de Szegö non génériques pour lesquelles les normes de Sobolev croissent vers l'infini en temps. Dans le corollaire suivant, on montre qu'un phénomène d'inflation des normes de Sobolev est aussi valable pour les solutions de (NLW) avec les même données initiales non génériques.

Corollary 1.5.2 ([78])**.** *L'équation* (NLW) *sur* $\mathbb{R}$ *admet des solutions pour lesquelles il existe une augmentation des normes de Sobolev* $H^s(\mathbb{R})$ *avec* $s > \frac{1}{2}$, *de* ε *au moment initial à* $\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{4s-2}{4s-1}}$ *à un moment ultérieur.*

Plus précisément, soient $0 < \varepsilon \ll 1$, $s > \frac{1}{2}$ *et* $\delta > 0$ *suffisamment petit. Soit* $W_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$ *une fonction rationnelle non générique telle que* H_{W_0} *ait une seule valeur propre double. Notons* $v(t)$ *la solution de l'équation* (NLW) *sur* $\mathbb{R}$ *de donnée initiale* εW_0. *Alors, pour* $\frac{1}{2\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}} \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}}$, *on obtient*

$$\frac{\|v(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}}{\|v(0)\|_{H^s(\mathbb{R})}} \geq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{4s-2}{4s-1}} \gg 1.$$

Des résultats analogues au Théorème 1.5.1 et au Corollaire 1.5.2 ont été obtenus dans [37] pour l'équation des ondes (NLW) sur $\mathbb{T}$. Notons que la méthode utilisée dans le cas du tore est celle des formes normales de Birkhoff que l'on ne sait pas adapter au cas de la droite réelle. De plus, des nouvelles difficultés sont introduites sur $\mathbb{R}$ par les basses fréquences, ce qui n'est pas le cas sur $\mathbb{T}$, où les fréquences sont discrètes.

Pour la preuve du Théorème 1.5.1 on applique la méthode du groupe de renormalisation introduite par Chen, Goldfend et Oono dans le contexte de la physique théorique [19, 20]. Cette méthode a été justifiée mathématiquement pour une grande classe d'EDO dans [93, 24]. Elle a aussi été appliquée rigoureusement à des EDP sur des intervalles bornés : équations de Navier-Stokes [67], équation d'un fluide peu compressible, équation de Swift-Hohenberg [68], ainsi qu'aux équations primitives de l'atmosphère et de l'océan [74]. Dans [3] elle a été appliquée à l'équation de Schrödinger non linéaire quadratique sur $\mathbb{R}^3$. L'idée de base de cette méthode est de décomposer la non linéarité dans une partie résonnante et une partie oscillatoire. Cette décomposition a été appliqué avec beaucoup d'efficacité par Germain, Masmoudi et Shatah pour montrer l'existence globale à donnée petite pour plusieurs équations non linéaires dispersives [38, 39, 40, 41, 42, 84]. Une présentation détaillée de la méthode du groupe de renormalisation est donnée dans la section 2.5.2 des préliminaires.

Le changement de variables $u(t) = \frac{1}{\varepsilon}e^{i|D|t}v(t)$ dans l'équation (NLW), permet de vérifier que u satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\varepsilon^2 e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}u|^2 e^{-i|D|t}u) =: \varepsilon^2 f(u,t) \\ u(0) = W_0. \end{cases}$$

La première étape de la méthode du groupe de renormalisation consiste à écrire la non linéarité $f(u,t)$ dans l'espace de Fourier et à la décomposer en une partie résonnante, qui ne dépend pas explicitement du temps, et en une partie oscillatoire :

$$\mathcal{F}\big(f(u,s)\big)(\xi) = -\,i\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{is(|\xi|-|\zeta|+|\eta-\xi|-|\eta-\zeta|)}\hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta.$$

En posant $\phi(\xi,\eta,\zeta) := |\xi| - |\zeta| + |\eta-\xi| - |\eta-\zeta|$, on a alors

$$f(u,s) = f_{\text{res}}(u) + f_{\text{osc}}(u,s),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} f_{\text{res}}(u) &= -i\mathcal{F}^{-1}\int\int_{\phi=0}\hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta, \\ f_{\text{osc}}(u,s) &= -i\mathcal{F}^{-1}\int\int_{\phi\neq 0} e^{is(|\xi|-|\zeta|+|\eta-\xi|-|\eta-\zeta|)}\hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta. \end{aligned}$$

La spécificité de l'équation (NLW) est qu'elle a beaucoup de résonances. Plus précisément, l'ensemble $\{\phi(\xi,\eta,\zeta)=0\}\subset\mathbb{R}^2$ a une mesure de Lebesgue non nulle, ce qui permet d'intégrer sur cet ensemble. En fait, à ξ fixé, $\{\phi(\xi,\eta,\zeta)=0\}$ est l'ensemble des paires $(\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^2$ telles que $\zeta,\eta-\xi$ et $\eta-\zeta$ aient le même signe que ξ où $\zeta=\xi$ où $\eta-\zeta=\xi$. On en déduit alors que

$$f_{\text{res}}(u) = -i\Big(\Pi_+(|u_+|^2u_+) + \Pi_-(|u_-|^2u_-)\Big).$$

L'idée de base de la méthode du groupe de renormalisation est que la dynamique d'une équation est dominée par ses résonances. On considère donc l'équation suivante, dite de renormalisation :

$$\begin{cases} \partial_t W = \varepsilon^2 f_{\text{res}}(W) \\ W(0) = W_0 \end{cases} \tag{RG}$$

et l'on montre que W est une bonne approximation pour u. C'est ici qu'intervient le choix que l'on a fait pour la donnée initiale W_0. On a supposé qu'elle est supportée sur des fréquences positives, de sorte que l'on a $W_{0,-}=0$. En projetant l'équation (RG) sur les fréquences négatives, on obtient

$$\begin{cases} i\partial_t W_- = \varepsilon^2\Pi_-(|W_-|^2W_-) \\ W_-(0) = 0. \end{cases}$$

Par suite, on a $W_-(t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, et l'approximation de notre solution est donc donnée par $W=W_+$, qui satisfait l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t W_+ = \varepsilon^2\Pi_+(|W_+|^2W_+) \\ W_+(0) = W_0. \end{cases}$$

Notons que, en faisant le changement de variables $\mathcal{W}=\varepsilon W$, on trouve que $\mathcal{W}$ satisfait l'équation de Szegö de donnée initiale εW_0.

Cependant, on n'arrive pas à montrer directement que W est une bonne approximation de u, à cause de difficultés techniques. Pour surmonter ces difficultés, on considère l'ansatz suivant pour l'approximation de u :

$$u_{\text{app}}(t) = W(t) + \varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(t), t),$$

où l'on pose $F_{\text{osc}}(W(t), t) := \int_0^t f_{\text{osc}}(W(t), s)ds$. On trouve ensuite l'équation satisfaite par $w = u - u_{\text{app}}$ et l'on montre, par un argument de bootstrap et en utilisant l'inégalité de Gronwall, que $\|w\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \varepsilon^{1-C_0\delta}$. Comme on a une bonne estimation pour $F_{\text{osc}}(W(t), t)$, on obtient en fait que $\|u - W\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \varepsilon^{1-C_0\delta}$ pour un temps long. Le résultat final est obtenu en revenant aux variables v et $\mathcal{W}$.

1.5.2 Approximation de deuxième ordre pour l'équation des ondes non linéaire (NLW) sur $\mathbb{T}$

Comme on l'a déjà dit, un résultat similaire au Théorème 1.5.1 pour le cas de l'équation (NLW) sur $\mathbb{T}$ a été démontré dans [37]. Grâce à de meilleures estimations, l'erreur est de l'ordre $O(\varepsilon^{3-})$ dans le cas de $\mathbb{T}$, et pas seulement de l'ordre $O(\varepsilon^{2-})$ comme dans le cas de $\mathbb{R}$. On améliore ce résultat en trouvant une solution approchée de sorte que l'erreur est encore plus petite, puisque de l'ordre $O(\varepsilon^{5-})$. Cette nouvelle approximation est donnée par une équation plus compliquée que l'équation de Szegö.

Theorem 1.5.3 ([78]). *Soient $0 < \varepsilon \ll 1$, $s > \frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\delta > 0$ suffisamment petit. Soit $W_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$ telle que la solution de l'équation de Szegö de donnée initiale εW_0 soit uniformément bornée par $\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons $v(t)$ la solution de l'équation* (NLW) *sur $\mathbb{T}$*

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = \mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0. \end{cases}$$

Considérons $\mathcal{W} \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{T}))$ la solution de l'équation suivante sur $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} i\partial_t \mathcal{W} = \Pi(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}) - \Pi_+(|\mathcal{W}|^2 \frac{1}{D}\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})) - \frac{1}{2}\Pi_+(\mathcal{W}^2 \frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})}) \\ \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

avec la même donnée initiale. Pour toute fonction $h \in H^s(\mathbb{T})$, on pose

$$f_{\text{osc}}(h, t) = e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}h|^2 e^{-i|D|t}h) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i|D|\tau}(|e^{-i|D|\tau}h|^2 e^{-i|D|\tau}h)d\tau,$$

et l'on note $F_{\text{osc}}(h,t)$ *l'unique fonction de moyenne nulle en* t *telle que* $\frac{\partial F_{\text{osc}}}{\partial t}(h,t) = f_{\text{osc}}(h,t)$. *Posons*

$$v_{\text{app}}(t) = e^{-i|D|t}\big(\mathcal{W}(t) + F_{\text{osc}}(\mathcal{W}(t),t)\big).$$

Alors, si $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, *on a*

$$\|v(t) - v_{\text{app}}(t)\|_{H^s} \leq \varepsilon^{5-C_0\delta},$$

où $C_0 > 0$ *est une constante absolue.*

La remarque qui s'impose est qu'il serait souhaitable d'obtenir une approximation de la solution de (NLW) pour un temps plus long. Malheureusement, la preuve du Théorème 1.5.3 ne nous permet pas d'avoir un temps plus long, même si l'on admettait une erreur d'approximation un peu plus grande.

Dans la preuve du Théorème 1.5.3, on applique la méthode de la moyennisation à l'ordre deux, introduite par Temam et Wirosoetisno dans [86]. Elle consiste à considérer l'ansatz suivant de moyennisation :

$$u_{\text{app}}(t) = W(t) + \varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(t),t) + \varepsilon^4 N_2(W,t),$$

où W est la solution de l'équation moyennée suivante :

$$\begin{cases} \partial_t W = \varepsilon^2 f_{\text{res}}(W) + \varepsilon^4 R_2(W) \\ W(0) = W_0. \end{cases}$$

On détermine R_2 et N_2 en faisant un développement de Taylor de la non linéarité $f(u_{\text{app}},t)$ en W, en imposant que u_{app} soit une solution approchée et en identifiant les différentes puissances de ε. En particulier, on trouve que

$$R_2(W) = \{f'(W,t)\cdot F_{\text{osc}}(W,t)\}_{\text{res}}.$$

En utilisant le choix que l'on a fait de la donnée initiale, comme dans le cas de (NLW) sur $\mathbb{R}$, on trouve que l'équation moyennée est équivalente à l'équation (1.5.1). Le reste de la preuve suit les même lignes que celle du Théorème 1.5.1.

1.5.3 Interaction des solitons avec un potentiel Toeplitz petit pour l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$

On considère l'équation de Szegö perturbée par un potentiel Toeplitz petit $\varepsilon T_b u$, où $T_b u = \Pi_+(bu)$ avec $b \in L^\infty(\mathbb{R})$:

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u) + \varepsilon T_b u,$$

avec une donnée initiale qui coïncide avec celle d'un soliton pour l'équation de Szegö non perturbée. En posant $\eta(x) := \frac{1}{x+i}$, on voit que la donnée initiale d'un soliton pour l'équation de Szegö s'écrit

$$u_0 = \frac{\alpha_0 e^{i\phi_0}}{x - a_0 + \frac{i}{\mu_0}} = \alpha_0 e^{i\phi_0} \mu_0 \eta(\mu_0(x - a_0)), \tag{1.5.2}$$

où $a_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_0, \mu_0 \in (0, \infty)$. De plus, pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, le soliton $u(t)$ a la même forme :

$$u(t) = \frac{\alpha(t) e^{i\phi(t)}}{x - a(t) + \frac{i}{\mu(t)}} = \alpha(t) e^{i\phi(t)} \mu(t) \eta(\mu(t)(x - a(t))),$$

où $\alpha(t) = \alpha_0$, $\mu(t) = \mu_0$,

$$\phi(t) = -\frac{\alpha_0^2 \mu_0^2}{4} t + \phi_0 \qquad \text{et} \qquad a(t) = \frac{\alpha_0^2 \mu_0}{2} t + a_0.$$

La solution de l'équation de Szegö perturbée par un potentiel Toeplitz petit, de donnée initiale soliton, garde la forme d'un soliton dépendant de quatre paramètres, pour un temps $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}(1 + \frac{2\delta}{5 \ln c_0} \ln(\frac{1}{\varepsilon}))$. De plus, on peut préciser les équations différentielles satisfaites par les paramètres $a(t), \alpha(t), \phi(t), \mu(t)$. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Theorem 1.5.4 ([77]). *Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dans $H^1(\mathbb{R})$ telle que $b' \in L^1(\mathbb{R})$. Soient $0 < \varepsilon << 1$ et $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Si u est la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u) + \varepsilon T_b u \\ u(0, x) = \alpha_0 e^{i\phi_0} \mu_0 \eta(\mu_0(x - a_0)), \end{cases} \tag{1.5.3}$$

avec $a_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_0, \mu_0 \in (0, \infty)$, alors

$$\|u(t) - \alpha(t) e^{i\phi(t)} \mu(t) \eta(\mu(t)(x - a(t)))\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2} + \frac{\delta}{3}},$$

pour des temps $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$, où c_0 est une constante dépendant seulement de α_0 et μ_0, et a, α, ϕ, μ satisfont

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\alpha^2 \mu}{2} - \frac{2\varepsilon}{\pi\mu} \int b'(a + \frac{x}{\mu}) \frac{x}{\mu} |\eta(x)|^2 dx + O(\varepsilon^{1 + \frac{2\delta}{3}}), \\ \dot{\alpha} = \frac{\varepsilon\alpha}{\pi\mu} \int b'(a + \frac{x}{\mu}) |\eta(x)|^2 dx + O(\varepsilon^{1 + \frac{2\delta}{3}}), \\ \dot{\phi} = -\frac{\alpha^2 \mu^2}{4} - \frac{\varepsilon}{\pi} \int b(a + \frac{x}{\mu}) |\eta(x)|^2 dx - \frac{\varepsilon}{\pi} \int b'(a + \frac{x}{\mu}) \frac{x}{\mu} |\eta(x)|^2 dx + O(\varepsilon^{1 + \frac{2\delta}{3}}), \\ \dot{\mu} = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \int b'(a + \frac{x}{\mu}) |\eta(x)|^2 dx + O(\varepsilon^{1 + \frac{2\delta}{3}}). \end{cases}$$

De plus, si $\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\phi}, \bar{\mu}$ *satisfont*

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = \frac{\bar{\alpha}^2\bar{\mu}}{2} - \frac{2\varepsilon}{\pi\bar{\mu}} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})\frac{x}{\bar{\mu}}|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\bar{\alpha}} = \frac{\varepsilon\bar{\alpha}}{\pi\bar{\mu}} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\bar{\phi}} = -\frac{\bar{\alpha}^2\bar{\mu}^2}{4} - \frac{\varepsilon}{\pi} \int b(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})|\eta(x)|^2 dx - \frac{\varepsilon}{\pi} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})\frac{x}{\bar{\mu}}|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\bar{\mu}} = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})|\eta(x)|^2 dx, \end{cases}$$

avec les même données initiales $a_0, \alpha_0, \phi_0, \mu_0$*, on a alors*

$$\begin{cases} |a - \bar{a}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}), \\ |\alpha - \bar{\alpha}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}), \\ |\phi - \bar{\phi}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{2\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon})^2, \\ |\mu - \bar{\mu}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}). \end{cases}$$

où $\tilde{c}_0$ *dépend de* α_0, μ_0.

Par conséquent, si ε *est suffisamment petit et* $\frac{3}{10} < \delta < \frac{1}{2}$*, on a pour des temps* $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ *l'estimation*

$$\|u(t) - \bar{\alpha}(t)e^{i\bar{\phi}(t)}\bar{\mu}(t)\eta(\bar{\mu}(t)(x - \bar{a}(t)))\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}.$$

L'étude de l'interaction des solitons avec un potentiel a été abordée dans le cadre de l'équation de Schrödinger non linéaire, de l'équation de Hartree et de l'équation mKdV, dans une série de papiers parmi lesquels on cite [14, 54, 31, 29, 30]. Certains de ces résultats ont été améliorés dans [48, 49, 50] par Holmer et Zworski et par Holmer, Perelman et Zworski. Ils ont considéré le cas de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique sur $\mathbb{R}$ avec un potentiel petit de type Dirac et avec un potentiel à variation lente, ainsi que le cas de mKdV avec un potentiel à variation lente et un double soliton comme donnée initiale. Le Théorème 1.5.4 a été prouvé en adaptant la méthode des auteurs ci-dessus au cas de l'équation de Szegö.

L'équation perturbée (1.5.3) est une évolution hamiltonienne d'énergie

$$H_b(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^4 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(x)|^2 dx.$$

On note par M la variété des solitons de dimension quatre :

$$M = \{e^{i\phi}\alpha\mu\eta(x - a)), \phi, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \mu > 0\}.$$

Le point de départ de la preuve du Théorème 1.5.4 est de déterminer le champ vectoriel qui correspond à la restriction $H_b|_M$ du hamiltonien à la variété des solitons.

Ensuite, on détermine le flot de ce champ de vecteurs, que l'on appelle *la dynamique effective.*

On décompose la solution de l'équation de Szegö perturbée (1.5.3) dans une partie qui appartient à la variété M et en une partie qui est symplectiquement orthogonale à M. On prouve ensuite que la partie qui est orthogonale à M est petite, ce qui montre que le flot de (1.5.3) est proche de la variété M. L'heuristique de Holmer et Zworski suggère alors que le flot doit être proche du flot de $H_b|_M$, i.e. de la dynamique effective.

La partie principale de la preuve consiste à estimer la partie de la solution qui est orthogonale à M. L'élément clé de cette estimation est la coercivité de l'opérateur linéarisé autour du soliton, que l'on définit ci-dessous.

On considère d'abord la fonctionnelle de Lyapounov $\mathcal{E} : H^{1/2}_+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{4}\int |u|^4 dx + \frac{i}{4}\int (\partial_x u)\bar{u} dx - \frac{1}{8}\int |u|^2 dx.$$

Alors $\eta = \frac{1}{x+i}$ est un point critique de $\mathcal{E}$ (i.e. $d_\eta \mathcal{E} = 0$), car l'on vérifie facilement que

$$\frac{i}{2}\partial_x \eta + \Pi(|\eta|^2\eta) - \frac{\eta}{4} = 0.$$

L'opérateur linéarisé $\mathcal{L} : H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ autour de η est défini par

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{E}''_\eta w = -\frac{i}{2}\partial_x w - 2T_{|\eta|^2} w - H_{\eta^2} w + \frac{1}{4} w.$$

On démontre que l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$ est coercif dans toutes les directions orthogonales à M, i.e. $\langle \mathcal{L}w, w\rangle \geq \frac{1}{4}\|w\|_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})}$ si w est orthogonal à M.

1.6 Problèmes ouverts

La principale motivation de l'introduction de l'équation de Szegö a été l'étude de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique sur le groupe de Heisenberg, ou plus généralement sur des variétés sous-riemanniennes. On a observé dans ce contexte un manque de dispersion et la nécessité d'étudier l'interaction entre la non linéarité cubique et le projecteur pseudodifférentiel Π_+. C'est ce que nous a conduit à l'équation de Szegö. Le principal problème ouvert est alors d'utiliser les résultats que l'on a pour l'équation de Szegö pour obtenir de nouvelles informations concernant l'équation de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg. Le problème le plus important est de prouver que cette équation est globalement bien posée. Des méthodes de compacité permettent de prouver l'existence de la solution, mais on ne sait pas si elle est unique.

Une autre question ouverte concerne les solitons de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$. Comme on l'a vu, les solitons sont orbitalement stables. La question qui se pose est de savoir s'ils sont asymptotiquement stables ou, dans le cas contraire, de déterminer le comportement à l'infini d'une solution qui, au moment initial, est très proche d'un soliton.

Dans le Théorème 1.4.4, on trouve une formule générale pour la solution de l'équation de Szegö lorsque la donnée initiale satisfait la condition $xu_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Cependant, la formule est très compliquée lorsque la donnée initiale n'est pas une fonction rationnelle, et l'on aimerait savoir si elle ne peut pas être mise sous une forme plus explicite et plus facile à manipuler.

On rappelle que, dans le Théorème 1.4.7, l'on a introduit des coordonnées action-angle généralisées seulement pour des fonctions rationnelles génériques. Une question naturelle est de savoir s'il serait possible d'introduire des coordonnées action-angle généralisées sur un ouvert et de développer une théorie KAM. Les difficultés à surmonter sont liées à l'absence d'un théorème de compacité de type Rellich pour le cas de la droite réelle et au fait que l'on ne sait pas caractériser la condition $xu_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ exclusivement en termes de données spectrales.

On a mis en évidence dans le Théorème 1.4.6 un exemple de solution de l'équation de Szegö sur $\mathbb{R}$ pour laquelle les grandes normes de Sobolev croissent vers l'infini en temps. Cette solution correspond à une donnée initiale rationnelle non générique au sens où l'opérateur de Hankel qui lui est associé possède une valeur propre double. Une telle solution est donc non générique à l'intérieur des solutions rationnelles. On se demande si, quand on regarde toutes les solutions, et pas seulement celles qui sont rationnelles, le phénomène de croissance des normes de Sobolev n'est pas, en fait, un phénomène générique. De tels résultats ont été obtenus par Hani dans sa thèse [45] pour certains équations de Schrödinger non linéaires et il serait intéressant de savoir si la démonstration s'adapte au cas de l'équation de Szegö. Un résultat encore plus intéressant serait de classifier toutes les solutions de l'équation de Szegö en spécifiant celles qui se décomposent en solitons à l'infini et celles dont les normes de Sobolev croissent vers l'infini en temps.

En ce qui concerne l'équation des ondes non linéaire (NLW), la plus brulante question est sans doute de savoir si elle admet des solutions dont les normes de Sobolev croissent vers l'infini. On a déjà observé dans le Corollaire 1.5.2 une augmentation de la norme de Sobolev H^s de ε à $\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{4s-2}{4s-1}}$, mais l'on ne sait pas si la norme peut croitre au moins plus qu'une constante fixée. Pour avoir un tel résultat, il faudrait attendre un temps de l'ordre $O(\frac{1}{\varepsilon^{2+\beta}})$ avec $\beta > 0$, et tous les résultats d'approximation que l'on a, pour le moment, sont pour un temps $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}}$. On aimerait donc trouver une approximation de la solution de l'équation (NLW) pour un temps plus long. Cette approximation n'est probablement plus donnée par l'équation de Szegö (pour laquelle on sait qu'il existe des solutions dont les normes de Sobolev croissent vers l'infini). Il est plus probable qu'une telle approximation soit donnée par une équation similaire à celle trouvée dans le Théorème 1.5.3, concernant l'approximation de deuxième ordre. Cette équation semble beaucoup plus compliquée et l'on ne sait pas si elle possède des solutions dont les normes de Sobolev sont très grandes.

Enfin, pour l'équation de Szegö avec un potentiel Toeplitz petit, la question est de savoir si le temps pour lequel on a la stabilité des solitons est optimal. Si ce n'est pas optimal, on aimerait savoir s'il serait possible de l'améliorer. Dans la preuve du Théorème 1.5.3, on utilise seulement la structure hamiltonienne de l'équation. On se pose donc la question de savoir s'il est possible d'améliorer le temps en utilisant l'intégrabilité complète de l'équation de Szegö. Un tel résultat a été obtenu par Holmer, Perelman et Zworski pour l'équation mKdV avec un potentiel qui varie lentement et pour un double soliton, à l'aide des lois de conservation de cette équation ainsi que des plusieurs relations algébriques.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Préliminaires d'analyse complexe

On rappelle dans cette section quelques propriétés des espaces de Hardy des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur, et des opérateurs de Hankel et Toeplitz qui agissent sur ces espaces. Pour plus de détails on renvoie à [69, Chapitre 6, Partie A] et [69, Chapitres 1,4, Partie B].

2.1.1 Espaces de Hardy des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur

La théorie des espaces de Hardy des fonctions holomorphes dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ est classique en analyse complexe [82]. On rappelle la définition des espaces de Hardy des fonctions holomorphes dans le disque unité $\mathbb{D}$:

$$L^p_+(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \middle| \|f\|^p_{L^p_+(\mathbb{T})} = \sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{ix})|^p \frac{dx}{2\pi} < \infty \right\}$$

si $0 < p < \infty$ et

$$L^\infty_+(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \middle| \|f\|_{L^\infty_+(\mathbb{T})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}.$$

Notons $\omega : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$ l'application conforme dans le demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} z > 0\}$ à valeurs dans le disque unité $\mathbb{D}$, dont on rappelle qu'elle est définie par :

$$\omega(z) = \frac{z-i}{z+i}, z \in \mathbb{C}_+.$$

Elle permet de faire le transfert vers le demi-plan supérieur, et l'on obtient alors que si $f \in L^p_+(\mathbb{T})$, la fonction $U_p f$ définie par

$$U_p f(z) = \Big(\frac{1}{\pi(z+i)^2}\Big)^{1/p} f\big(\frac{z-i}{z+i}\big), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_+$. De plus, $U_p f$ appartient à l'espace de Hardy $L^p_+(\mathbb{R})$ que l'on définit ci-dessous.

Definition 2. *L'espace de Hardy des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur $L^p_+(\mathbb{R})$ avec $0 < p \leq \infty$, est l'espace des fonctions $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}_+)$ telles que*

$$\|g\|_{L^p_+(\mathbb{R})} = \sup_{y>0} \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^p dx \Big)^{1/p} < \infty \textit{ si } p < \infty$$

et

$$\|g\|_{L^\infty_+(\mathbb{R})} = \sup_{z \in \mathbb{C}_+} |g(z)| < \infty.$$

On a la formule de Poisson suivante pour les fonctions appartenant à de tels espaces.

Proposition 2.1.1 (Formule de Poisson)**.** *Si $f \in L^p_+(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \textit{ si } y > 0.$$

Une importance particulière est accordée à l'espace $L^2_+(\mathbb{R})$. Cela est dû au fait que $L^2_+(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert facilement identifiable à un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$, comme on le voit dans le théorème suivant.

Theorem 2.1.2 (Paley, Wiener, 1934)**.** *On a l'identification*

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \mathcal{F}^{-1} L^2(\mathbb{R}_+) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \operatorname{supp} \hat{f} \subset [0, \infty)\},$$

où on note par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier.

2.1.2 Fonctions intérieures dans l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$

Une classe importante de fonctions dans l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$ est la classe des fonctions intérieures, que l'on définit comme suit.

Definition 3. *Une fonction $\phi \in L^\infty_+(\mathbb{R})$ est dite intérieure si sa valeur au bord vérifie $|\phi(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

On a aussi le théorème suivant de factorisation canonique des fonctions dans l'espace de Hardy $L^p_+(\mathbb{R})$.

Theorem 2.1.3. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Toute fonction* $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ *admet une unique factorisation de la forme :*

$$f = \phi[f],$$

où ϕ *est une fonction intérieure et* $[f]$ *est le facteur extérieur de Schwarz-Herglotz :*

$$[f](z) := exp\Big(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\log|f(t)|\frac{dt}{1+t^2}\Big), z \in \mathbb{C}_+.$$

Toute fonction dans un espace de Hardy, satisfait une condition sur ses zéros dans $\mathbb{C}_+$, appelée condition de Blaschke et s'énonçant comme suit.

Proposition 2.1.4. *Soit* $f \in L^p_+(\mathbb{R})$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$, $f \neq 0$. *Notons* λ_n *ses zéros dans* $\mathbb{C}_+$ *comptés avec leurs multiplicités. On a alors :*

$$\sum_n \frac{\mathrm{Im}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < \infty.$$

De plus, si l'on note B *le produit de Blaschke construit avec les zéros de* f *défini par*

$$B(z) = \prod_n \varepsilon_n \frac{z-\lambda_n}{z-\overline{\lambda}_n}, z \in \mathbb{C}_+,$$

avec $\varepsilon_n = \frac{|\lambda_n^2+1|}{\lambda_n^2+1}$ *si* $\lambda_n \neq i$ *et* $\varepsilon_n = 1$ *si* $\lambda_n = i$, *il existe* $g \in L^p_+(\mathbb{R})$ *avec* $g(z) \neq 0$ *pour* $z \in \mathbb{C}_+$ *telle que*

$$f = B \cdot g \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p_+(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^p_+(\mathbb{R})}.$$

Remarquons que puisque $\left|\frac{x-\lambda_n}{x-\overline{\lambda}_n}\right| = 1$, on a $|B(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et le produit de Blaschke B est donc une fonction intérieure. Les fonctions intérieures, admettent la factorisation canonique suivante.

Proposition 2.1.5. *Soit* ϕ *une fonction intérieure. Il existe une unique factorisation de la forme*

$$\phi = \lambda \cdot B \cdot V,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, B *est le produit de Blaschke construit avec les zéros de* ϕ *et* V *est une fonction intérieure singulière de la forme*

$$V(z) = e^{iaz}\exp\Big(i\int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}d\nu(t)\Big),$$

avec $a \geq 0$ *et* ν *une mesure finie, positive et singulière sur* $\mathbb{R}$.

2.1.3 Sous-espaces invariants de l'espace de Hardy

On commence par définir l'opérateur de translation τ_α par la formule suivante

$$(\tau_\alpha f)(x) = f(x-\alpha),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les translations forment un groupe d'opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R})$. L'image par la transformation de Fourier de l'opérateur de translation τ_α est l'opérateur de multiplication par $e^{i\alpha x}$, car $\tau_\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(e^{i\alpha x}f)$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, on a

$$\tau_\alpha = \mathcal{F}e^{i\alpha x}\mathcal{F}^{-1},$$

ce qui assure que les groupes $(\tau_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ et $(e^{i\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ sont conjugués via la transformation de Fourier. En utilisant le Théorème 2.1.2, on obtient alors qu'un sous-espace E de $L^2_+(\mathbb{R})$ est invariant par rapport à la multiplication par $e^{i\alpha x}$, i.e. $e^{i\alpha x}E \subset E$, si et seulement si le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}_+)$ qui contient toutes les transformations de Fourier des fonctions de E est invariant par la translation τ_α, i.e. $\tau_\alpha(\mathcal{F}(E)) \subset \mathcal{F}(E)$. Ces sous-espaces invariants de l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$ ont été caractérisés par Lax [57], qui a démontré le résultat suivant. On énonce son résultat ci-dessous.

Theorem 2.1.6 (Sous-espaces invariants par rapport à la translation)**.** *Tout sous-espace fermé et non vide de $L^2_+(\mathbb{R})$ qui est invariant par rapport à la multiplication par $e^{i\alpha x}$ pour tout $\alpha \geq 0$ est de la forme $\phi L^2_+(\mathbb{R})$, où ϕ est une fonction intérieure analytique. De plus, ϕ est uniquement déterminée modulo la multiplication par des nombres complexes de module 1.*

Signalons que dans le cas de l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur le disque unité $L^2_+(\mathbb{T})$, un énoncé analogue avait été démontré précédemment par Beurling [82].

2.1.4 Opérateurs de Hankel et de Toeplitz sur l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$

Une matrice de Hankel est une matrice infinie $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j\geq 0}$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\gamma_{ij} = a_{i+j}$ pour tout $i, j \geq 0$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \vdots & \\ a_2 & a_3 & \vdots & & \\ a_3 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Dans le cas de l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{T})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$, l'on considère l'application d'identification $L^2_+(\mathbb{T}) \to \ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ définie par

$$f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\geq 0}.$$

Elle permet de définir un opérateur de Hankel sur $L^2_+(\mathbb{T})$ à l'aide de la matrice de Hankel $(\gamma_{ij})_{i,j\geq 0}$, par $\Gamma : \ell^2 \to \ell^2$,

$$\Gamma : (x_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{k\geq 0} \gamma_{nk} x_k,$$

Dans le cas de $L^2_+(\mathbb{R})$, on pose la définition suivante.

Definition 4. *Soit* $\Pi_+ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ *le projecteur de Szegö, i.e. le projecteur sur des fréquences positives ou nulles :*

$$\Pi_+(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

L'opérateur de Hankel $H_u : L^2_+(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ *de symbole* $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \cap L^2_+(\mathbb{R})$ *est alors défini par :*

$$H_u(h) = \Pi_+(u\bar{h}).$$

Cette définition est justifiée par l'égalité

$$\widehat{H_u(h)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{u}(\xi+\eta)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta,$$

que l'on retrouvera dans la preuve du Théorème 3.2.1. On voit apparaitre $\hat{u}(\xi+\eta)$ exactement comme on avait $\gamma_{nk} = a_{n+k}$ dans le cas de $L^2_+(\mathbb{T})$.

Comme il sera démontré dans le Lemme 3.3.5, H_u est un opérateur de Hilbert-Schmidt donc c'est en particulier un opérateur compact. De plus, il est $\mathbb{C}$-antilinéaire et il satisfait à l'identité suivante :

$$(H_u(h_1), h_2)_{L^2} = (H_u(h_2), h_1)_{L^2}, \tag{2.1.1}$$

pour toutes $h_1, h_2 \in L^2_+(\mathbb{R})$. Par conséquent, H_u^2 est un opérateur linéaire positif à trace et auto-adjoint.

Une matrice de Toeplitz est une matrice infinie $(\Lambda_{ij})_{i,j\geq 0}$ pour laquelle il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\Lambda_{ij} = b_{i-j}$ pour tous $i, j \geq 0$. En utilisant de nouveau l'identification de $L^2_+(\mathbb{T})$ avec ℓ^2, on peut définir un opérateur de Toeplitz sur $L^2_+(\mathbb{T})$. Dans le cas de $L^2_+(\mathbb{R})$, on utilise la définition suivante, qui peut être justifiée comme on l'a fait précédemment pour des opérateurs de Hankel.

Definition 5. *L'opérateur de Toeplitz $T_b : L^2_+(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ de symbole $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ est défini par :*

$$T_b(h) = \Pi_+(bh).$$

Notons que T_b est $\mathbb{C}$-linéaire et borné. De plus, T_b est auto-adjoint si et seulement si b est à valeurs réelles.

2.1.5 Un théorème de type Kronecker pour les opérateurs de Hankel de rang fini sur $L^2_+(\mathbb{R})$

Comme on l'a déjà vu, les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$ sont compacts. Les opérateurs de rang fini sont denses dans la classe des opérateurs compacts. On veut déterminer la condition à imposer sur le symbole u pour que H_u soit de rang fini. On a le théorème suivant, dit de type Kronecker parce que son analogue dans le cas de $L^2_+(\mathbb{T})$ a été démontré par Kronecker en 1881.

Theorem 2.1.7 (Théorème de type Kronecker)**.** *Un opérateur de Hankel H_u est de rang fini N si et seulement si u est une fonction rationnelle qui appartient à l'ensemble $\mathcal{M}(N)$ défini par :*

$$\mathcal{M}(N) := \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \in L^2_+(\mathbb{R}) \,\middle|\, \deg(B) = N,\, \deg(A) \le N-1,\, B(0) = 1,\, pgcd(A,B) = 1 \right\}.$$

Pour une preuve de ce théorème on renvoie au Chapitre 3.

2.1.6 Caractérisation d'un opérateur de Hankel à l'aide des relations de commutation avec des opérateurs de shift

On peut reformuler à l'aide des opérateurs de shift la condition disant qu'une matrice est de Hankel. On définit l'opérateur de shift S par

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

On note S^* son inverse :

$$S^*(y_0, y_1, \dots) = (y_1, y_2, \dots).$$

La matrice Γ est alors une matrice de Hankel si et seulement si

$$\Gamma S = S^* \Gamma.$$

Grâce à l'identification de $L^2_+(\mathbb{T})$ avec ℓ^2, Γ est un opérateur de Hankel sur $L^2_+(\mathbb{T})$ si et seulement si $\Gamma T_z = T_z^*\Gamma$, où T_z est l'opérateur de shift $T_z : L^2_+(\mathbb{T}) \to L^2_+(\mathbb{T})$ défini par

$$T_z f(z) = z f(z) = e^{ix} f(e^{ix}),$$

avec $z = e^{ix} \in \mathbb{T}$.

Dans le cas des opérateurs de Hankel sur $L^2_+(\mathbb{R})$, le rôle de l'opérateur de multiplication par z est joué par le semi-groupe d'opérateurs $\{T_\alpha\}_{\alpha>0}$ qui agissent sur $L^2_+(\mathbb{R})$ par $T_\alpha f(x) = e^{i\alpha x} f(x)$.

Proposition 2.1.8. *Un opérateur $H : L^2_+(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ est de Hankel si et seulement si*

$$HT_\alpha = T_\alpha^* H \text{ pour tout } \alpha > 0.$$

2.2 Préliminaires de théorie spectrale

On rappelle dans cette section la définition et les propriétés de base des opérateurs de Hilbert-Schmidt, des opérateurs à trace et des opérateurs d'ondes de la théorie dite de "scattering". Pour plus de détails on renvoie aux Chapitres IV à IX de [81].

2.2.1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Dans ce qui suit on considère des opérateurs qui agissent sur des espaces de Hilbert séparables. On rappelle qu'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est séparable si et seulement s'il possède une base orthonormale dénombrable.

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt forment une classe spéciale d'opérateurs linéaires compacts. De plus, les opérateurs de rang fini en forment un sous-espace dense.

Definition 6. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Notons $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ la famille des opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit de Hilbert-Schmidt si*

$$\|T\|_{H-S} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|T\phi_n\|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Cette quantité ne dépend pas du choix de la base $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et représente la norme de Hilbert-Schmidt de d'opérateur T.

La condition ci-dessus est difficile à vérifier en pratique. Le théorème suivant nous donne une autre caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt qui est plus facile à vérifier. Il nous dit qu'un opérateur défini sur L^2 à l'aide d'un noyau est de Hilbert-Schmidt si et seulement si son noyau appartient à $L^2_{x,y}$.

Theorem 2.2.1 (Théorème VI.23, [81]). *Soient (M,μ) un espace mesuré et $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$. L'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il existe une fonction $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ telle que*

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

De plus, on a alors

$$\|T\|_{H-S} = \Big(\int |K(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)\Big)^{1/2}.$$

2.2.2 Opérateurs à trace

Les opérateurs à trace forment une sous-famille de l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt, et constituent donc une sous-classe d'opérateurs compacts. Tout comme pour les opérateurs de Hilbert-Schmidt, les opérateurs de rang fini en forment un sous-espace dense.

Definition 7. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit à trace si*

$$\|T\|_1 := \mathrm{tr}|T| = \sum_{n=0}^{\infty}(\phi_n, |T|\phi_n) < \infty,$$

où l'on pose $|T| = \sqrt{T^*T}$. Cette quantité ne dépend pas du choix de la base $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et représente la norme trace de d'opérateur T.

On a la caractérisation suivante des opérateurs à trace en fonction des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Proposition 2.2.2. *L'opérateur A est à trace si et seulement s'il existe deux opérateurs de Hilbert-Schmidt B et C tels que $A = BC$.*

2.2.3 Le théorème spectral

Le théorème spectral a plusieurs formulations apparemment distinctes, mais qui sont en un certain sens équivalentes. La formulation la plus simple dit que tout opérateur auto-adjoint est un opérateur de multiplication dans une certaine base.

Theorem 2.2.3 (Le théorème spectral, Théorème VIII.4, [81]). *Soit A un opérateur auto-adjoint dont le domaine $D(A)$ est un sous-ensemble d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Il existe alors un espace mesuré (M, μ), une fonction mesurable f sur M et un opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \to L^2(M, \mu)$ tels que*

$$UAU^{-1}\phi(x) = f(x)\phi(x),$$

pour tout $\phi \in U(D(A))$.

Ce résultat est une généralisation du théorème spectral en dimension finie, qui assure que chaque matrice carrée auto-adjointe est diagonalisable.

Ce théorème fournit une manière naturelle de définir des fonctions sur l'espace des opérateurs auto-adjoints. Étant donnée une fonction borélienne g sur $\mathbb{R}$, on peut poser

$$g(A) := U^{-1}T_{g(f)}U,$$

où $T_{g(f)}$ est l'opérateur sur $L^2(M, \mu)$ de multiplication par la fonction $g \circ f$. Ceci nous permet de construire des mesures spectrales pour des vecteurs cycliques. On rappelle qu'un vecteur ψ est dit cyclique pour A si $\{g(A)\psi | \, g \in C^\infty(\mathbb{R})\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Definition 8. *Soit $\psi \in \mathcal{H}$ un vecteur cyclique pour A. La mesure μ_ψ associée au vecteur ψ est définie par*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_\psi(x) = (\psi, g(A)\psi).$$

On introduit de plus les sous-espaces de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ suivants.

Definition 9. *Soit A un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On définit :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{pp} :=& \{\psi \in \mathcal{H} | \, \mu_\psi \text{ est une mesure purement ponctuelle}\} \\
\mathcal{H}_{ac} :=& \{\psi \in \mathcal{H} | \, \mu_\psi \text{ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue}\} \\
\mathcal{H}_{sing} :=& \{\psi \in \mathcal{H} | \, \mu_\psi \text{ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue}\}
\end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant.

Theorem 2.2.4. *L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ se décompose en une somme directe de la forme suivante :*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing},$$

chacun de ces sous-espaces étant invariant par rapport à A. De plus, $A_{|\mathcal{H}_{pp}}$ possède un ensemble complet de vecteurs propres, $A_{|\mathcal{H}_{ac}}$ a exclusivement des mesures spectrales absolument continues et $A_{|\mathcal{H}_{sing}}$ a exclusivement des mesures spectrales singulières.

On peut alors introduire la définition suivante.

Definition 10. *Notons par $\sigma(T)$ le spectre d'un opérateur arbitraire T. Soit A un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On pose :*

$$\begin{aligned}\sigma_{pp}(A) :=& \sigma(A_{|\mathcal{H}_{pp}}),\\ \sigma_{ac}(A) :=& \sigma(A_{|\mathcal{H}_{ac}}),\\ \sigma_{sing}(A) :=& \sigma(A_{|\mathcal{H}_{sing}}),\end{aligned}$$

qui désignent respectivement le spectre purement ponctuel, le spectre absolument continu, et le spectre singulier de A.

2.2.4 Théorie du scattering. Existence et complétude des opérateurs d'ondes généralisés

Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le principe de base de la théorie du scattering consiste à comparer les dynamiques linéaires correspondant à e^{-iAt} et e^{-iBt}. Le fait que $e^{-iBt}\phi$ "soit asymptotiquement linéaire" par rapport à A, quand $t \to -\infty$, signifie qu'il existe $\phi_+ \in \mathcal{H}$ tel que

$$\lim_{t\to-\infty} \|e^{-iBt}\phi - e^{-itA}\phi_+\| = 0,$$

ce qui équivaut à dire que

$$\lim_{t\to-\infty} \|e^{iAt}e^{-itB}\phi - \phi_+\| = 0.$$

On se restreint donc au problème de l'existence d'une limite forte.

Definition 11. *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soient $\mathcal{H}_{ac}(B)$ le sous-espace absolument continu par rapport à B et $P_{ac}(B)$ le projecteur orthogonal sur ce sous-espace.*

On dit que les opérateurs d'ondes généralisés existent lorsque la limite forte suivante existe :

$$\Omega^{\pm}(A,B) = \lim_{t\to\mp\infty} e^{itA}e^{-itB}P_{ac}(B). \tag{2.2.1}$$

Les opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}$ ont les propriétés suivantes.

Proposition 2.2.5 (Proposition 1, XI.3, [81])**.** *Supposons que les opérateurs d'ondes généralisés $\Omega^{\pm}(A,B)$ existent.*

(i) *Les opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}(A,B)$ sont des isométries partielles dans $\mathcal{H}_{ac}(B)$ à valeurs dans* $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A,B)$.

(ii) $\Omega^{\pm}\big(D(B)\big) \subset D(A)$ *et* $A\Omega^{\pm}(A,B) = \Omega^{\pm}(A,B)B$.

On sait aussi que : $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A,B)$ est inclus dans $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$. Dans le cas où l'on a égalité, on dit que $\Omega^{\pm}(A,B)$ sont complets.

Definition 12. *Supposons que $\Omega^{\pm}(A,B)$ existent. Si $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A,B) = \mathcal{H}_{ac}(A)$, on dit que les opérateurs d'ondes généralisés sont complets.*

Il existe plusieurs méthodes pour montrer que les opérateurs d'ondes existent et sont complets. Dans cette thèse, la méthode suivante s'avère utile.

Theorem 2.2.6 (Théorème de Kuroda-Birman, Théorème XI.9, [81])**.** *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints tels que $(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}$ est un opérateur à trace. Alors, les opérateurs d'ondes généralisés $\Omega^{\pm}(A,B)$ existent et sont complets.*

2.3 Préliminaires de théorie des systèmes dynamiques complètement intégrables

Dans cette section on rappelle la définition d'un système de dimension infinie complètement intégrable au sens de Lax.

On rappelle ensuite le théorème de Liouville-Arnold pour des systèmes complètement intégrables de dimension finie, ainsi que la notion de coordonnées action-angle. On énonce de plus un théorème qui généralise ces coordonnées au cas non-compact.

2.3.1 Paires de Lax

Une paire de Lax pour un système dynamique complètement intégrable est une paire d'opérateurs qui dépendent du temps et qui décrivent le système correspondant. La notion de paire de Lax a été introduite pour la première fois par Peter Lax dans [58]. On renvoie à cet article pour plus de détails.

Definition 13. *Une paire d'opérateurs linéaires qui dépendent du temps $(L(t), B(t))$ est appelée une paire de Lax si $B(t)$ est anti-symétrique pour tout t, si $B^* = -B$ et si l'équation suivante est satisfaite :*

$$\partial_t L = [B, L], \tag{2.3.1}$$

où $[B,L] = BL - LB$ est le commutateur de B et L.

L'avantage de disposer d'une paire de Lax pour une équation d'évolution est qu'elle fournit des lois de conservation pour cette équation, comme on peut le voir dans la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. *On considère une équation d'évolution non-linéaire de la forme*

$$\partial_t u = K(u), \tag{2.3.2}$$

telle que $u(t)$ *appartient à un espace de fonctions* $\mathcal{B}$ *fixé, pour tout* t. *Supposons que l'on puisse associer à chaque élément* $u \in \mathcal{B}$ *un opérateur linéaire* L_u *sur un espace de Hilbert. Supposons aussi qu'il existe des opérateurs anti-symétriques* $B(t)$ *tels que* $(L_{u(t)}, B(t))$ *soit une paire de Lax.*

Les valeurs propres, ou plus généralement le spectre de $L_{u(t)}$, *sont alors des intégrales premières de l'équation* (2.3.2).

Démonstration. L'équation (2.3.1) est équivalente à

$$-BL + \partial_t L + LB = 0. \tag{2.3.3}$$

Soit $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ la famille d'opérateurs satisfaisant

$$\partial_t U = BU. \tag{2.3.4}$$

Comme B est anti-symétrique, il n'est pas difficile de montrer que $U(t)$ est unitaire pour tout t, i.e. $U^{-1} = U^*$. En remplaçant $B = (\partial_t U)U^{-1}$ dans l'équation (2.3.3), et en multipliant l'équation obtenue par U^{-1} à droite et par U à gauche, on obtient que :

$$-U^{-1}(\partial_t U)U^{-1}LU + U^{-1}(\partial_t L)U + U^{-1}L(\partial_t U) = 0.$$

Ceci prouve que $\partial_t\Big(U(t)^{-1}L_{u(t)}U(t)\Big) = 0$. L'opérateur $L_{u(t)}$ est donc conjugué à $L_{u(0)}$ pour tout t. En particulier, les valeurs propres (ou plus généralement le spectre de $L_{u(t)}$) sont conservées par le flot de l'équation (2.3.2). □

La paire de Lax est un outil très important pour résoudre des équations complètement intégrables en se ramenant à un problème spectral inverse ou de scattering inverse.

2.3.2 Théorème de Liouville-Arnold et coordonnées action-angle

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$, où ω est la forme symplectique sur M. Une fonction $F : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ admet un champ hamiltonien de vecteurs X_F si

$$d_u F(h) = \omega(h, X_F(u)),$$

pour tout $u \in M$ et $h \in T_u M$.

Definition 14. *Supposons que la fonction $F : M \to \mathbb{R}$ admette un champ hamiltonien de vecteurs X_F. L'équation hamiltonienne de hamiltonien F est l'équation d'évolution suivante :*

$$\partial_t u = X_F(u).$$

Si les fonctions $F, G : M \to \mathbb{R}$ admettent les champs hamiltoniens de vecteurs X_F, X_G, on définit alors le crochet de Poisson de F et G par :

$$\{F, G\}(u) = \omega(X_F(u), X_G(u)) = d_u G(X_F(u)).$$

Definition 15. *1. On dit que F est une intégrale première de l'équation hamiltonienne de hamiltonien H si $\{F, H\} \equiv 0$.*

2. Deux fonctions $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ sont en involution si leur crochet de Poisson est nul.

On a la définition suivante d'un système complètement intégrable de dimension finie.

Definition 16. *Un système hamiltonien de hamiltonien H sur la variété symplectique M de dimension $2n$ est dit complètement intégrable s'il existe n intégrales premières $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ qui sont libres (i.e. les différentielles $dF_1, \ldots, dF_n$ sont libres en chaque point de $M_{\mathbf{f}}$) et en involution.*

Theorem 2.3.2 (Théorème de Liouville-Arnold, [4])**.** *Soit M une variété symplectique de dimension $2n$. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n fonctions en involution sur M. Si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, notons*

$$M_{\mathbf{f}} = \left\{ x \in M \middle| F_i(x) = f_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

l'ensemble de niveau des fonctions $F_1, \ldots, F_n$. Supposons que $F_1, \ldots, F_n$ sont libres sur $M_{\mathbf{f}}$.

Alors :

1. $M_{\mathbf{f}}$ est une variété invariante par rapport au flot de l'équation hamiltonienne de hamiltonien $H = F_1$.

2. Si la variété $M_{\mathbf{f}}$ est compacte et connexe, elle est alors difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n = \{(\phi_1, \ldots, \phi_n) \mod 2\pi\}$ de dimension n.

3. Le mouvement induit sur $M_{\mathbf{f}}$ par le flot de l'équation hamiltonienne de hamiltonien $H = F_1$ est quasi-périodique. Plus précisément, il existe des coordonnées angulaires $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ sur $M_{\mathbf{f}}$ tels que l'équation hamiltonienne mentionnée s'écrit dans ces coordonnées

$$\partial_t \phi = \mathbf{w},$$

où la vitesse $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{f})$ *est constante sur* $M_{\mathbf{f}}$.

4. L'équation hamiltonienne de hamiltonien $H = F_1$ *est intégrable par quadratures.*

On s'intéresse maintenant à un voisinage de la variété compacte et connexe $M_{\mathbf{f}}$. Sur $M_{\mathbf{f}}$, qui est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^n$, on a déjà introduit des coordonnées angulaires $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathbb{T}^n$. On peut démontrer que $M_{\mathbf{f}}$ possède un voisinage qui est difféomorphe à $\mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n$, où $\mathbb{D}^n$ est le disque unité de $\mathbb{R}^n$. Les coordonnées que l'on introduit sur ce voisinage sont $(F_1, \ldots, F_N, \phi_1, \ldots, \phi_N)$. Dans ces coordonnées, l'équation hamiltonienne de hamiltonien H s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{F} = 0 \\ \partial_t \phi = \mathbf{w}(\mathbf{f}) \end{cases}$$

et s'intègre facilement. En revanche, les coordonnées $(\mathbf{F}, \phi)$ ne sont en général pas symplectiques. Il s'avère qu'il existe des fonctions de F, que l'on note $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{F})$, qui sont des actions et des angles $\tilde{\phi}$, de sorte que les coordonnées $(\mathbf{I}, \tilde{\phi})$ sont symplectiques, ce qui signifie que la forme symplectique ω s'écrit :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\tilde{\phi}_i.$$

$(\mathbf{I}, \tilde{\phi})$ s'appellent les coordonnées action-angle. On énonce maintenant un théorème qui assure l'existence de telles coordonnées. Pour plus de détails on renvoie à [5, 63, 4, 25].

Theorem 2.3.3 (Coordonnées action-angle, [5, 63]). *Soit* (M, ω) *une variété symplectique de dimension* $2n$. *Soient* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n *fonctions de classe* C^∞ *en involution sur* M. *Posons* $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ *et*

$$\begin{aligned} M_r &:= \big\{ x \in M \big| \, dF_1(x), \ldots, dF_n(x) \text{ sont libres } \big\}. \\ M_{\mathbf{F}(x)} &:= \Big\{ y \in M_r \Big| F_i(y) = F_i(x) \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n \Big\} \\ M_{r,c} &:= \{ x \in M_r | \, M_{\mathbf{F}(x)} \text{ est compact} \}. \end{aligned}$$

L'ensemble $M_{r,c}$ *est alors une partie ouverte de* M. *De plus, pour* $x \in M_{r,c}$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* $M_{\mathbf{F}(x)}$ *dans* M, *invariant par rapport au flot de l'équation de hamiltonien* $H = F_1$, *et un difféomorphisme* $(\mathbf{I}, \phi) : U \to V \times \mathbb{T}^n$ *avec* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *tels que* $\mathbf{I}$ *puisse être écrit sous la forme* $\mathbf{I} = \chi \circ \mathbf{F}$ *pour un difféomorphisme* $\chi : \mathbf{F}(U) \to V$ *et tels que l'on ait aussi :*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\phi_i \text{ sur } U.$$

2.3.3 Coordonnées action-angle généralisées

Le théorème de Liouville-Arnold ne peut être appliqué que lorsque les ensembles de niveau des intégrales premières sont compacts. Dans [27], Fiorani, Giachetta et Sardanashvily démontrent que ce théorème se généralise aussi au cas non-compact. Ils prouvent que, sous certaines conditions, on peut introduire des coordonnées action-angle généralisées pour un système complètement intégrable, formées d'actions (intégrales premières pour le système), d'angles appartenant à $\mathbb{T}$ et d'angles généralisés appartenant à $\mathbb{R}$. Au lieu d'obtenir des tores invariants, l'on obtient des cylindres toroïdaux $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ invariants. On cite ci-dessous le Théorème 1 dans [27].

Theorem 2.3.4 (Coordonnées action-angle généralisées, [27])**.** *Soit (W, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ sur laquelle on considère un système hamiltonien de hamiltonien H. Soient $F_1 := H, F_2, \ldots, F_n$ n intégrales premières réelles, de classe C^∞, libres et en involution. Notons $\pi := (F_1, \ldots, F_N) : W \to \mathbb{R}^n$.*

Soit M une sous-variété connexe invariante de W. Il existe alors un voisinage ouvert U de M tel que

$$\pi : U \to N := \pi(U)$$

est une fibration sur un ensemble ouvert $N \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que :

(i) *toutes les fibres de la variété fibrée $\pi : U \to N := \pi(U)$ sont mutuellement difféomorphes,*

(ii) *les champs de vecteurs hamiltoniens de F_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ sont complets, ce qui signifie que les solutions des systèmes hamiltoniens correspondants existent pour tout temps.*

Il existe alors un voisinage U_M de M tel que les fibres de $U_M \to \pi(U_M)$ soient difféomorphes à un cylindre toroïdal $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. De plus, on peut introduire sur U_M des coordonnées action-angle généralisées I_i, J_j, $\phi_i \in \mathbb{T}, \gamma_j \in \mathbb{R}$ telles que le système hamiltonien peut s'écrire comme suit dans les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} \partial_t I_i = 0 \\ \partial_t \tilde{I}_j = 0 \\ \partial_t \phi_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \\ \partial_t \gamma_j = \frac{\partial H}{\partial \tilde{I}_j}, \end{cases}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n-k$, et telles que la forme symplectique s'écrite

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} dI_i \wedge d\phi_i + \sum_{j=1}^{n-k} d\tilde{I}_j \wedge d\gamma_j.$$

2.4 Préliminaires d'analyse fonctionnelle

Dans cette section on rappelle quelques inégalités utiles dans l'étude des EDP. On discute aussi la méthode de décomposition en profils.

2.4.1 Inclusions de Sobolev et inégalités de Yudovich, Brezis-Gallouët et Gagliardo-Nirenberg

Theorem 2.4.1 (Inclusions de Sobolev)**.** *On a les inclusions continues suivantes :*

Si $s > \frac{n}{2}$, *alors* $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Si $0 \leq s < \frac{n}{2}$, *alors* $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *pour* $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$.

Si $0 \leq s < \frac{n}{2}$, *alors* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *pour* $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$.

Par conséquent, quand $n = 1$ on a :

Si $s > \frac{1}{2}$, alors $H^s(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.

Si $0 \leq s < \frac{1}{2}$, alors $H^s(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - s$.

En utilisant la dernière inclusion et le fait que $H^{1/2}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ pour tout $0 \leq s \leq 1/2$, on obtient les inclusions continues suivantes :

$$H^{1/2}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \text{ pour tout } 2 \leq p < \infty.$$

Ceci équivaut à l'existence de constantes C_p dépendant seulement de p, telles que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}$$

pour tout $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. Il s'avère que $C_p = C\sqrt{p}$, où C est une constante absolue, et l'on a donc

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\sqrt{p}\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}.$$

Des inégalités similaires ont été utilisées par Yudovich [91], Vladimirov [88] et Ozawa [71]. On renvoie à [35] pour une preuve dans le cas de $\mathbb{T}$, qui peut être facilement adaptée au cas de $\mathbb{R}$.

Notons que la constante $C_p = C\sqrt{p}$ tend vers l'infini quand $p \to \infty$, ce qui montre que $H^{1/2}(\mathbb{R})$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En revanche, on a l'inégalité logarithmique suivante montrée par Brezis et Gallouët :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(s)\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\Big(\log\Big(2 + \frac{\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}}{\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}}\Big)\Big)^{1/2},$$

pour tout $s > 1/2$ et $u \in H^s(\mathbb{R})$.

Une conséquence des inégalités de Sobolev est l'inégalité suivante de Gagliardo-Nirenberg.

Theorem 2.4.2 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Pour tout $p \geq 2$ si $n = 1, 2$, et pour tout $2 \leq p < \frac{2n}{n-2}$ si $n > 2$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla u\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où $\theta = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$.

Si l'on considère des fonctions $u \in H^{1/2}_+(\mathbb{R}) = H^{1/2}(\mathbb{R}) \cap L^2_+(\mathbb{R})$, dans l'espace de Sobolev correspondant à l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{R})$, on obtient l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante :

$$\|u\|_{L^4_+(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_+}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^{1/2}_+},$$

dont une preuve est donnée dans la Proposition 3.1.5.

2.4.2 Décomposition en profils

Theorem 2.4.3 (Théorème de Rellich)**.** *Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. Toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$ contient alors une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. On dit que l'inclusion $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte.*

En revanche, quand $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'inclusion n'est pas compacte. Dans ce cas, on utilise la décomposition en profils [33] pour décrire précisément l'obstruction pour une suite bornée dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $0 < s < \frac{n}{2}$, à sa convergence dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{n}$.

Le principe de la décomposition en profils, que l'on explique ci-dessous, trouve ses origines dans la méthode de concentration-compacité introduite par Lions [61, 60]. Cette méthode a été raffiné pour fournir un théorème de décomposition en profils par Gérard [33], Merle et Vega [66], Hmidi et Keraani [54], Bahouri et Gérard [6], Keraani [53] et d'autres.

On suit l'approche de [54] pour décrire le défaut de compacité de l'inclusion de Sobolev $H^{1/2}_+(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour tout $2 < p < \infty$. Le théorème suivant montre que l'obstruction pour une suite bornée dans $H^{1/2}_+$ à sa convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ est précisément une superposition de translations de profils fixes.

Theorem 2.4.4 (Théorème de décomposition en profils pour des suites bornées dans $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$)**.** *Soit $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$. Il existe alors une sous-suite* *de* $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, notée encore* $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, une suite de profils fixes* $\{V^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *dans* $H_+^{1/2}(\mathbb{R})$ *et une famille de suites réelles* $\{x^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *telles que pour tout* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$v^n = \sum_{j=1}^{\ell} V^{(j)}(x - x_n^{(j)}) + r_n^{(\ell)},$$

avec

$$\lim_{\ell\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|r_n^{(\ell)}\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

pour tout $p \in (2, \infty)$ *et*

$$\|v^n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \|V^{(j)}\|_{L^2}^2 + \|r_n^{(\ell)}\|_{L^2}^2 + o(1) \text{ quand } n \to \infty,$$

$$\|v^n\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \|V^{(j)}\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 + \|r_n^{(\ell)}\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$

2.5 Préliminaires de théorie des perturbations

2.5.1 Dynamique des solitons dans des potentiels petits ou à variation lente

Un soliton pour une équation non linéaire hamiltonienne sur $\mathbb{R}^d$ est une solution $S(t,x)$ pour laquelle il existe une fonction S_0, il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$S(t,x) = e^{-it\omega} S_0(x - ct).$$

Supposons que l'équation soit invariante par rapport aux symétries, comme les translations dans l'espace, les modulations, le scaling ou la transformation galiléenne. En appliquant l'une de ces symétries au soliton $S(t,x)$, on obtient alors un autre soliton. Cette procédure permet de construire la sous-variété M des solitons dans l'espace des phases. Souvent, c'est une sous-variété de dimension finie qui a comme coordonnées les paramètres de translation, modulation, scaling et le paramètre galiléen.

On considère à présent le problème suivant. Soit (E) une équation hamiltonienne non linéaire pour laquelle on sait déterminer tous les solitons et montrer qu'ils sont stables. On perturbe cette équation en ajoutant un potentiel linéaire multiplicatif petit $\varepsilon V(x)$ ou un potentiel linéaire multiplicatif à variation lente $V(\varepsilon x)$ qui est tel que la nouvelle équation (EV) soit encore hamiltonienne. On se propose d'étudier la dynamique des solutions de l'équation (EV) ayant pour données initiales les données initiales $S(0,x)$ des solitons pour l'équation (E). Notre but est de prouver que, dans certains cas, ces solutions gardent la forme d'un soliton et que, de plus, on peut écrire explicitement les équations différentielles satisfaites par les paramètres de ce soliton.

Ce type de résultat a été obtenu par Bronski et Jerrard [14] et Keraani [54, 55] pour NLS cubique sur $\mathbb{R}^n$ avec un potentiel à variation lente, par Fröhlich, Tsau, et Yau [31] pour l'équation de Hartree sur $\mathbb{R}^n$ avec un potentiel à variation lente, par Fröhlich, Gustafson, Jonsson, Sigal [29, 30] pour NLS avec une non linéarité générale et l'équation de Hartree avec un potentiel à variation lente, par Holmer et Zworski [49, 48] pour NLS cubique sur $\mathbb{R}$ avec un potentiel à variation lente et avec un potentiel de Dirac petit et finalement par Holmer, Perelman, et Zworski [50] pour mKdV.

On décrit ci-dessous le principe général de la preuve d'une telle affirmation, en suivant surtout les trois derniers articles cités. On considère d'abord la sous-variété de dimension finie M des solitons stables et l'on détermine son espace tangent. On calcule ensuite la restriction de la forme symplectique à cette sous-variété et l'on vérifie qu'elle est non dégénérée.

L'étape suivante consiste à calculer la restriction à la sous-variété M du hamiltonien de l'équation (EV), que l'on note H_V. On calcule le champ hamiltonien sur M de $H_V\Big|_M$ et l'on détermine le flot qu'il génère. Ce flot s'appelle " la dynamique effective". Le but est de montrer que la dynamique de l'équation (EV) avec donnée initiale de type soliton $S(0,x)$ est gouvernée par la dynamique effective. Pour montrer ceci, on commence par reparamétriser la solution de l'équation (EV). Comme la restriction de la forme symplectique à M est non dégénérée, on peut démontrer que la solution u de (EV) se décompose dans un voisinage de M en une partie u_M qui appartient à M et une autre partie w qui est symplectiquement orthogonale à M :

$$u = u_M + w.$$

Le point important de l'argument est de démontrer que w est petit. Ceci implique que le flot de l'équation (EV) est proche de la sous-variété des solitons M, ce qui permet d'en déduire formellement que le flot de l'équation (EV) est proche de celui de $H_V\Big|_M$ sur M, et donc de la dynamique effective.

Pour prouver que w est petit, on réécrit convenablement l'équation satisfaite par w. On introduit aussi la fonctionnelle de Lyapounov pour laquelle le soliton est un point critique, ainsi que l'opérateur linéarisé autour du soliton. On utilise de manière cruciale les propriétés de coercivité de cet opérateur linéarisé.

Dans le Chapitre 6, on applique cette méthode pour étudier la dynamique des solitons de l'équation de Szegö avec un potentiel de type Toeplitz petit. Le potentiel de type Toeplitz petit $\varepsilon T_V u = \varepsilon \Pi_+(Vu)$ est la généralisation naturelle d'un potentiel linéaire multiplicatif petit $\varepsilon V u$ permettant de préserver la structure hamiltonienne de l'équation.

2.5.2 Méthode du groupe de renormalisation

La méthode du groupe de renormalisation a été introduite par Chen, Goldfend et Oono [19, 20] dans le contexte de la physique théorique. Cette méthode est le plus souvent utilisée pour trouver une solution approchée d'une équation perturbée de sorte que cette approximation soit valable pour un temps long.

L'avantage principal de la méthode du groupe de renormalisation est qu'elle fournit un algorithme pouvant être facilement appliqué pour un grand nombre d'équations. Le point de départ consiste en un développement naïf de la solution, pour lequel aucune hypothèse spécifique n'est nécessaire. Ensuite, les termes divergents du développement sont enlevés par renormalisation. La solution approchée est alors donnée par la solution de l'équation de renormalisation.

L'efficacité de la méthode du groupe de renormalisation a été illustrée dans une variété d'exemples d'EDO traditionnellement analysées à l'aide de méthodes disparates. La méthode a été justifiée mathématiquement pour une large classe d'EDO [93, 24] et a aussi été appliquée de manière rigoureuse à plusieurs EDP [67, 68, 74, 3].

Dans ce qui suit on décrit la méthode du groupe de renormalisation dans le cas de l'équation des ondes non linéaire (NLW) :

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{NLW}$$

On commence par faire le changement de variables $u(t) = \frac{1}{\varepsilon} e^{i|D|t} v(t)$ et l'on pose $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon^2$. La fonction u satisfait alors l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\tilde{\varepsilon} e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}u|^2 e^{-i|D|t}u) =: \tilde{\varepsilon} f(u,t) \\ u(0) = \frac{1}{\varepsilon} v_0 =: u_0. \end{cases}$$

Comme on l'a déjà dit, le point de départ est le développement naïf de la solution :

$$u(t) = u^{(0)}(t) + \tilde{\varepsilon} u^{(1)}(t) + \tilde{\varepsilon}^2 u^{(2)}(t) + \dots$$

En faisant un développement limité de $f(u,t)$ autour de $u^{(0)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(u,t) &= f(u^{(0)},t) + f'(u^{(0)},t)(u(t) - u^{(0)}(t)) + \dots \\ &= f(u^{(0)},t) + \tilde{\varepsilon} f'(u^{(0)},t) u^{(1)}(t) + \dots \end{aligned}$$

En remplaçant les deux derniers développements dans l'équation satisfaite par u et en identifiant les puissances de ε, on obtient

$$\begin{cases} \partial_t u^{(0)} = 0 \\ \partial_t u^{(1)} = f(u^{(0)}, t) \\ \dots \end{cases}$$

Par conséquent, on a $u^{(0)}(t) = u_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$u^{(1)}(t) = \int_0^t f(u_0, s)ds,$$

ce qui donne la solution approchée

$$u(t) = u_0 + \tilde{\varepsilon} u^{(1)}(t) + O(\tilde{\varepsilon}^2) = u_0 + \tilde{\varepsilon} \int_0^t f(u_0, s)ds + O(\tilde{\varepsilon}^2).$$

Ensuite, on décompose la non linéarité $f(u, t)$ en une partie résonnante et une partie oscillatoire. Pour cela, on calcule d'abord la transformée de Fourier de la non linéarité :

$$\mathcal{F}\big(f(u,s)\big)(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{is(|\xi|-|\zeta|+|\eta-\xi|-|\eta-\zeta|)} \hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta.$$

Si l'on pose $\phi(\xi, \eta, \zeta) := |\xi| - |\zeta| + |\eta - \xi| - |\eta - \zeta|$, on peut alors écrire que

$$f(u, s) = f_{\text{res}}(u) + f_{\text{osc}}(u, s),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} f_{\text{res}}(u) &= -i\mathcal{F}^{-1} \int \int_{\phi=0} \hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta, \\ f_{\text{osc}}(u,s) &= -i\mathcal{F}^{-1} \int \int_{\phi\neq 0} e^{is(|\xi|-|\zeta|+|\eta-\xi|-|\eta-\zeta|)} \hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta. \end{aligned}$$

Notons que, lorsque ξ est fixé, l'ensemble $\{\phi(\xi, \eta, \zeta) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est de mesure de Lebesgue non nulle, ce qui permet d'intégrer sur cet ensemble.

Cette décomposition implique que la solution approchée s'écrit

$$u(t) = u_0 + \tilde{\varepsilon} t f_{\text{res}}(u_0) + \tilde{\varepsilon} \int_0^t f_{\text{osc}}(u_0, s)ds + O(\tilde{\varepsilon}^2).$$

Notons que la partie résonnante de la non linéarité provoque l'apparition d'un terme $\tilde{\varepsilon} t f_{\text{res}}(u_0)$ qui croit en temps et à cause duquel l'approximation devient fausse lorsque le temps s'approche de $\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$. L'idée de la méthode du groupe de renormalisation est de considérer le terme $u_0 + \tilde{\varepsilon} t f_{\text{res}}(u_0)$ comme le développement limité à l'ordre un d'une fonction $W(t)$ autour de $t = 0$. On introduit alors l'équation de renormalisation :

$$\begin{cases} \partial_t W = \tilde{\varepsilon} f_{\text{res}}(W) \\ W(0) = u_0, \end{cases}$$

et l'on montre que W est une bonne approximation pour u. Cependant, on ne sait pas prouver directement ce résultat. On considère d'abord la solution approchée

$$u_{\text{app}}(t) = W(t) + \tilde{\varepsilon} F_{\text{osc}}(W(t), t),$$

où $F_{\text{osc}}(h, t) := \int_0^t f_{\text{osc}}(h, s) ds$ pour tout $h \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. On prouve ensuite que l'on a de bonnes estimations pour $F_{\text{osc}}(W, t)$ qui vont nous permettre de négliger le deuxième terme de la solution approchée ci-dessus.

2.5.3 Méthode de moyennisation

On explique à présent le principe de la méthode de moyennisation dans le contexte de l'équation des ondes non linéaire (NLW) sur $\mathbb{T}$. Cette méthode a été utilisée par Temam et Wirosoetisno [86], et est proche de la méthode du groupe de renormalisation si l'on regarde à l'ordre un.

Comme dans la section précédente, un changement de variables permet d'écrire l'équation des ondes non linéaire (NLW) sur $\mathbb{T}$ sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\tilde{\varepsilon} e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t} u|^2 e^{-i|D|t} u) =: \tilde{\varepsilon} f(u, t) \\ u(0) = \frac{1}{\varepsilon} v_0 =: u_0. \end{cases}$$

Pour obtenir une meilleure approximation que celle obtenue à partir du développement naïf de la section précédente, les auteurs ci-dessus proposent d'utiliser l'ansatz suivant :

$$u_{\text{app}}(t) = W(t) + \tilde{\varepsilon} N_1(W, t) + \tilde{\varepsilon}^2 N_2(W, t) + \cdots =: N(W, t, \tilde{\varepsilon}),$$

où $W(t)$ est solution de l'équation de moyennisation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t W = \tilde{\varepsilon} R_1(W) + \tilde{\varepsilon}^2 R_2(W) + \cdots =: R(W, \tilde{\varepsilon}) \\ W(0) = u_0. \end{cases}$$

Notons que $N(W, t, \tilde{\varepsilon})$ et $R(W, \tilde{\varepsilon})$ sont des séries formelles dont la convergence n'est pas connue. Cependant, dans ce qui suit, on déterminera R_k et N_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour faire en sorte que les séries tronquées à tout ordre fini donnent une bonne approximation de la solution u.

On a $\tilde{\varepsilon} f(u_{\text{app}}, t) = \tilde{\varepsilon} f(N(W, t, \tilde{\varepsilon}), t)$ et

$$\begin{aligned} \partial_t u_{\text{app}} &= D_W N(W, t, \tilde{\varepsilon}) \cdot \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}(W, t, \tilde{\varepsilon}) \\ &= D_W N(W, t, \tilde{\varepsilon}) \cdot R(W, \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial N}{\partial t}(W, t, \tilde{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Formellement, l'égalité $\partial_t u_{\text{app}} = \tilde{\varepsilon} f(u_{\text{app}}, t)$ implique que

$$D_W N(W, t, \tilde{\varepsilon}) \cdot R(W, \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial N}{\partial t}(W, t, \tilde{\varepsilon}) = \tilde{\varepsilon} f(N(W, t, \tilde{\varepsilon}), t). \tag{2.5.1}$$

On dispose aussi du développement suivant de la fonction f autour de W :

$$\begin{aligned} f(u_{\text{app}}, t) =& f(W, t) + \tilde{\varepsilon} f'(W, t) N_1(W, t) \\ &+ \tilde{\varepsilon}^2 \Big(\frac{1}{2} f''(W, t) \cdot N_1(W, t) \otimes N_1(W, t) + f'(W, t) \cdot N_2(W, t) \Big) + \dots \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} \sum_{|j|=k} \tilde{\varepsilon}^k \frac{\mathcal{P}(j)}{m!} f^{(m)}(W, t) \cdot N_{j_1}(W, t) \otimes \cdots \otimes N_{j_m}(W, t), \end{aligned}$$

où $|j| := j_1 + j_2 + \dots j_k$ et où la valeur exacte de $\mathcal{P}(j)$ est donnée par la formule de Faà di Bruno. On substitue les expressions que l'on a pour $N(W, t, \tilde{\varepsilon})$ et $R(W, \tilde{\varepsilon})$, ainsi que le développement de Taylor de f dans l'équation (2.5.1). En identifiant les différentes puissances de $\tilde{\varepsilon}$, on obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t}(W, t) + R_1(W) &= f(W, t) \qquad (2.5.2) \\ \frac{\partial N_k}{\partial t}(W, t) + R_k(W) &= -\sum_{\ell=1}^{k-1} D_W N_\ell \cdot R_{k-\ell} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{|j|=k-1} \frac{\mathcal{P}(j)}{m!} f^{(m)}(W, t) \cdot N_{j_1} \otimes \cdot \otimes N_{j_m}, \\ &=: \Phi_k(W, t) \end{aligned}$$

pour $k \geq 2$. On introduit maintenant quelques notations. On décompose une fonction 2π-périodique $a(t)$ en une partie résonante et une partie oscillatoire de la manière suivante :

$$a(t) = a_{\text{res}} + a_{\text{osc}}(t),$$

où

$$a_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\tau)d\tau$$

est la moyenne de la fonction $a(t)$. La partie oscillatoire est alors

$$a_{\text{osc}}(t) = \sum_{k\neq 0} \widehat{a}(k)e^{itk}.$$

On note aussi

$$a_{\text{posc}}(t) = \sum_{k\neq 0} \widehat{a}(k)\frac{e^{itk}}{ik}$$

l'unique primitive de $a_{\text{osc}}(t)$ dont la moyenne est nulle. Avec ces notations, on a donc :

$$a(t) = a_{\text{res}} + \frac{\partial}{\partial t}a_{\text{posc}}(t).$$

L'équation (2.5.2), permet alors d'écrire que :

$$R_1(W) = f_{\text{res}}(W) \qquad \text{et} \qquad N_1(W,t) = f_{\text{posc}}(W,t) = F_{\text{osc}}(W,t),$$

ce qui redonne à l'ordre un la solution approchée donnée par la méthode du groupe de renormalisation. A l'ordre supérieur $k \geq 2$, on obtient que

$$R_k(W) = \Phi_k(W,t)_{\text{res}}, \qquad \text{et} \qquad N_k(W,t) = \Phi_k(W,t)_{\text{posc}}.$$

Notons que, grâce à l'expression de $\Phi_k(W,t)$ on peut toujours déterminer $R_k(W)$ et $N_k(W,t)$ à partir de R et N d'ordres inférieurs.

Chapitre 3

Classification and stability of solitons for the cubic Szegö equation on the real line

Ce chapitre est la reprise d'un article à paraitre dans le journal "Analysis and PDEs".

3.1 Introduction

One of the most important properties in the study of the nonlinear Schrödinger equations (NLS) is *dispersion*. It is often exhibited in the form of the Strichartz estimates of the corresponding linear flow. In case of the cubic NLS :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M, \tag{3.1.1}$$

Burq, Gérard, and Tzvetkov [17] observed that the dispersive properties are strongly influenced by the geometry of the underlying manifold M. Taking this idea further, Gérard and Grellier [34] remarked that dispersion disappears completely when M is a sub-Riemannian manifold (for example, the Heisenberg group). In this situation, many of the classical arguments used in the study of NLS no longer hold. As a consequence, even the problem of global well-posedness of (3.1.1) on a sub-Riemannian manifold still remains open.

In [35, 34], Gérard and Grellier introduced a model of a non-dispersive Hamiltonian equation called *the cubic Szëgo equation.* (See (3.1.2) below.) The study of this equation is the first step toward understanding existence and other properties of smooth solutions of NLS in the absence of dispersion. Remarkably, the Szegö equation turned out to be completely integrable in the following sense. It possesses a Lax pair structure and an infinite sequence of conservation laws. Moreover, the dynamics can be approximated by a sequence of finite dimensional completely integrable Hamiltonian systems. To illustrate the degeneracy of this completely integrable structure, several instability phenomena were established in [35].

The Szëgo equation was studied in [35, 34] on the circle $\mathbb{S}^1$. More precisely, solutions were considered to belong at all time to the Hardy space $L^2_+(\mathbb{S}^1)$ on the unit disk $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. This is the space of L^2-functions on $\mathbb{S}^1$ with $\hat{f}(k) = 0$ for all $k < 0$. These functions can be extended as holomorphic functions on the unit disk. Several properties of the Hardy space on the unit disk naturally transfer to the Hardy space $L^2_+(\mathbb{R})$ on the upper half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z; \mathrm{Im} z > 0\}$, defined by

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \Big\{f \text{ holomorphic on } \mathbb{C}_+; \|g\|_{L^2_+(\mathbb{R})} := \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

In view of the Paley-Wiener theorem, we identify this space of holomorphic functions on $\mathbb{C}_+$ with the space of its boundary values :

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \operatorname{supp} \hat{f} \subset [0, \infty)\}.$$

The transfer from $L^2_+(\mathbb{S}^1)$ to $L^2_+(\mathbb{R})$ is made by the usual conformal transformation $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ given by

$$\omega(z) = i\frac{1+z}{1-z}.$$

However, the image of a solution of the Szëgo equation on $\mathbb{S}^1$ under the conformal transformation is no longer a solution of the Szëgo equation on $\mathbb{R}$. Therefore, we directly study the Szëgo equation on $\mathbb{R}$ in the following.

Endowing $L^2(\mathbb{R})$ with the usual scalar product $(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u\bar{v}$, we define the Szegö projector $\Pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ to be the projector onto the non-negative frequencies,

$$\Pi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

For $u \in L^2_+(\mathbb{R})$, we consider *the Szëgo equation on the real line* :

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1.2}$$

This is a Hamiltonian evolution associated to the Hamiltonian

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx$$

defined on $L^4_+(\mathbb{R})$. From this structure, we obtain the formal conservation law $E(u(t)) = E(u(0))$. The invariance under translations and under modulations provides two more conservation laws, $Q(u(t)) = Q(u(0))$ and $M(u(t)) = M(u(0))$, where

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx \quad \text{and} \quad M(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{u} D u \, dx, \quad \text{with } D = -i\partial_x.$$

Now, we define the Sobolev spaces $H^s_+(\mathbb{R})$ for $s \geq 0$:

$$H^s_+(\mathbb{R}) = \left\{ h \in L^2_+(\mathbb{R}); \|h\|_{H^s_+} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (1 + |\xi|^2)^s |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Similarly, we define the homogeneous Sobolev norm for $h \in \dot{H}^s_+$ by

$$||h||_{\dot{H}^s_+} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\xi|^{2s} |\hat{h}(\xi)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Slight modifications of the proof of the corresponding result in [35] lead to the following well-posedness result :

Theorem 3.1.1. *The cubic Szegö equation* (3.1.2) *is globally well-posed in* $H^s_+(\mathbb{R})$ *for* $s \geq \frac{1}{2}$*, i.e. given* $u_0 \in H^{1/2}_+$*, there exists a unique global-in-time solution* $u \in C(\mathbb{R}; H^{1/2}_+)$ *of* (3.1.2) *with initial condition* u_0*. Moreover, if* $u_0 \in H^s_+$ *for some* $s > \frac{1}{2}$*, then* $u \in C(\mathbb{R}; H^s_+)$*.*

In this paper, we concentrate on the study of traveling waves. The two main goals are the classification of traveling waves and their stability. As a result, we show that the situation on the real line is essentially different from that on the circle.

A solution for the cubic Szegö equation on the real line (3.1.2) is called *a traveling wave or a soliton* if there exist $c, \omega \in \mathbb{R}$ such that

$$u(t,z) = e^{-i\omega t} u_0(z - ct), \quad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \tag{3.1.3}$$

for some $u_0 \in H^{1/2}_+(\mathbb{R})$. Note that a solution to (3.1.2) in $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$ has a natural extension onto $\mathbb{C}_+$, and we have used this viewpoint in (3.1.3). Substituting (3.1.3) into (3.1.2), we obtain that u_0 satisfies the following equation on $\mathbb{R}$:

$$cDu_0 + \omega u_0 = \Pi(|u_0|^2 u_0). \tag{3.1.4}$$

In the following, we use the simpler notation u instead of u_0, when we study time-independent problems. From (3.1.4), we see that traveling waves with nonzero velocity, $c \neq 0$, have good regularity. Indeed, we prove that $u \in H^s_+(\mathbb{R})$ for all $s \geq 0$ in

Lemma 3.3.1. In particular, by Sobolev embedding theorem, we have $u \in L^p_+(\mathbb{R})$ for $2 \leq p \leq \infty$. On the other hand, equation (3.1.4) yields in Lemma 3.4.1 that there exist no nontrivial stationary waves, i.e. traveling waves of velocity $c = 0$, in L^2_+.

Now, we present our main results :

Theorem 3.1.2. *A function $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(\mathbb{R}))$ is a traveling wave if and only if there exist $C, p \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Im} p < 0$ such that*

$$u(0,z) = \frac{C}{z-p}. \tag{3.1.5}$$

Theorem 3.1.3. *Let $a > 0$, $r > 0$, and consider the cylinder*

$$C(a,r) = \left\{ \frac{\alpha}{z-p}; |\alpha| = a,\ \operatorname{Im} p = -r \right\}.$$

Let $\{u_0^n\} \subset H^{1/2}_+$ with

$$\inf_{\phi \in C(a,r)} \|u_0^n - \phi\|_{H^{1/2}_+} \to 0 \text{ as } n \to +\infty,$$

and let u^n denote the solution to (3.1.2) *with initial data u_0^n. Then*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\phi \in C(a,r)} \|u^n(t,x) - \phi(x)\|_{H^{1/2}_+} \to 0.$$

Let us compare our results to those obtained in [35]. In the case of the Szegö equation on $\mathbb{S}^1$, the nontrivial stationary waves ($c = 0$) are finite Blaschke products of the form

$$\alpha \prod_{j=1}^{N} \frac{z - p_j}{1 - p_j z},$$

where $|\alpha|^2 = \omega$, $N \in \mathbb{N}$, and $p_1, p_2, ..., p_N \in \mathbb{D}$, and the traveling waves with nonzero velocity are rational fractions of the form :

$$\frac{C z^l}{z^N - p}, \tag{3.1.6}$$

where $N \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $C, p \in \mathbb{C}$, and $|p| > 1$. Moreover, instability phenomena were displayed for some of the above traveling waves. For the cubic Szegö equation on $\mathbb{R}$, Theorems 3.1.2 and 3.1.3 state that there exist less traveling waves (corresponding to $N = 1$ and $l = 0$ in (3.1.6)) and that there is no instability phenomenon.

The proof of Theorem 3.1.2 involves arguments from several areas of analysis : a Kronecker-type theorem, scattering theory, existence of a Lax pair structure, a theorem by Lax on invariant subspaces of the Hardy space, and canonical factorization of Beurling-Lax inner functions. In the following, we introduce the main notions and known results, and briefly describe the strategy of the proof.

As in [35], an important property of the Szëgo equation on $\mathbb{R}$ is the existence of a Lax pair structure. Using the Szegö projector, we first define two important classes of operators on L^2_+ : *the Hankel and Toeplitz operators.* We use these operators to find a Lax pair. See Proposition 3.1.4.

A Hankel operator $H_u : L^2_+ \to L^2_+$ of symbol $u \in H^{1/2}_+$ is defined by

$$H_u(h) = \Pi(u\bar{h}).$$

Note that H_u is $\mathbb{C}$-antilinear and satisfies

$$(H_u(h_1), h_2) = (H_u(h_2), h_1). \tag{3.1.7}$$

In Lemma 3.3.5 below we prove that H_u is a Hilbert-Schmidt operator of Hilbert-Schmidt norm $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_{\dot{H}^{1/2}}$.

A Toeplitz operator $T_b : L^2_+ \to L^2_+$ of symbol $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ is defined by

$$T_b(h) = \Pi(bh).$$

T_b is $\mathbb{C}$-linear. Moreover, T_b is self-adjoint if and only if b is real-valued.

Proposition 3.1.4. *Let $u \in C(\mathbb{R}; H^s_+)$ for some $s > \frac{1}{2}$. The cubic Szegö equation* (3.1.2) *is equivalent to the following evolution equation :*

$$\frac{d}{dt} H_u = [B_u, H_u], \tag{3.1.8}$$

where $B_u = \frac{i}{2} H_u^2 - iT_{|u|^2}$. In other words, the pair (H_u, B_u) is a Lax pair for the cubic Szegö equation on the real line.

The proof of Proposition 3.1.4 follows the same lines as that of the corresponding result on $\mathbb{S}^1$ in [35], and is based on the following identity :

$$H_{\Pi(|u|^2 u)} = T_{|u|^2} H_u + H_u T_{|u|^2} - H_u^3. \tag{3.1.9}$$

Combining (3.1.4) and (3.1.9), we deduce that if u is a traveling wave with $c \neq 0$, then the following identity holds :

$$A_u H_u + H_u A_u + \frac{\omega}{c} H_u + \frac{1}{c} H_u^3 = 0, \tag{3.1.10}$$

where

$$A_u = D - \frac{1}{c} T_{|u|^2}. \tag{3.1.11}$$

In Section 2, we prove a Kronecker-type theorem for the Hardy space $L^2_+(\mathbb{R})$, where we classify all the symbols u such that the operator H_u has finite rank. For a proof of the classical theorem for $L^2_+(\mathbb{S}^1)$, due to Kronecker, see [35].

We prove Theorem 3.1.2 in Section 4. We first prove that all the traveling waves are rational fractions. On $\mathbb{S}^1$, this follows easily from the Kronecker theorem and the fact that the operator A_u has discrete spectrum. On $\mathbb{R}$, however, it turns out that A_u has continuous spectrum. Therefore, we use scattering theory to study the spectral properties of A_u in detail in Section 3. More precisely, we show that the generalized wave operators $\Omega^{\pm}(D, A_u)$, rigorously defined by (3.3.1) below, exist and are complete. As a result, we obtain that

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \operatorname{Ker} H_u,$$

where $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$ is the absolutely continuous subspace of A_u. The subspace $\operatorname{Ker} H_u$ plays an important role in our analysis. More precisely, it turns out to be invariant under multiplication by $e^{i\alpha x}$, for all $\alpha \geq 0$. Therefore, applying a theorem by Lax (Proposition 3.4.4 below) on invariant subspaces, it results that

$$\operatorname{Ker} H_u = \phi L^2_+,$$

where ϕ is an inner function in the sense of Beurling-Lax, i.e. a bounded holomorphic function on $\mathbb{C}_+$ such that $|\phi(x)| = 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Using the Lax pair structure and the identity (3.1.10), we show that ϕ satisfies the following simple equation :

$$cD\phi = |u|^2 \phi.$$

However, as an inner function, ϕ satisfies a canonical factorization (3.4.3). From this, it follows that ϕ belongs to a special class of inner functions, the finite Blaschke products, i.e.

$$\phi(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \lambda_j}{z - \overline{\lambda_j}},$$

where $N \in \mathbb{N}$ and $\mathrm{Im}\lambda_j > 0$ for all $j = 1, 2, \dots, N$. The Kronecker-type theorem then yields that the traveling wave u is a rational fraction.

In the case of $\mathbb{S}^1$, the natural shift, multiplication by e^{ix}, was used in concluding traveling waves are of the form (3.1.6). In our case, we use the “infinitesimal" shift, multiplication by x, to show that traveling waves are of the form (3.1.5).

Finally, we prove Theorem 3.1.3 in Section 5. The orbital stability of traveling waves is a consequence of the fact that traveling waves are ground states for the following inequality, an analogue of Weinstein's sharp Gagliardo-Nirenberg inequality in [90].

Proposition 3.1.5. *For all $u \in H_+^{1/2}(\mathbb{R})$ the following Gagliardo-Nirenberg inequality holds :*

$$\|u\|_{L^4} \le \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^{1/2}, \tag{3.1.12}$$

or, equivalently,

$$E \le \frac{1}{\pi} MQ.$$

Moreover, equality holds if and only if $u = \frac{C}{x-p}$, where $C, p \in \mathbb{C}$ with $\mathrm{Im} p < 0$.

Remark 3.1.6. As a consequence of Proposition 3.1.5, one can verify that the functions $u = \frac{C}{x-p}$, with $\mathrm{Im} p < 0$, are indeed initial data for traveling waves. More precisely, since they are minimizers of the functional

$$v \in H_+^{1/2} \mapsto M(v)Q(v) - \pi E(v),$$

the differential of this functional at u is zero. Thus,

$$\frac{1}{2} Q(u) Du + \frac{1}{2} M(u) u - \pi \Pi(|u|^2 u) = 0.$$

Consequently, u is a solution of equation (3.1.4) with

$$c = \frac{Q(u)}{2\pi} = \frac{|C|^2}{-2\mathrm{Im} p}, \qquad \omega = \frac{M(u)}{2\pi} = \frac{|C|^4}{4(-\mathrm{Im} p)^3}$$

and hence it is an initial datum for a traveling wave.

In the case of $\mathbb{S}^1$, the Gagliardo-Nirenberg inequality suffices to conclude the stability of the traveling waves with $N = 1$. However, in the case of $\mathbb{R}$, we need to use in addition a concentration-compactness argument. This concentration-compactness argument, which first appeared in the work of Cazenave and Lions [18], was refined and turned into profile decomposition theorems by Gérard [33] and later by Hmidi and Keraani [54]. We use it in the form of Proposition 3.5.1, a profile decomposition theorem for bounded sequences in $H_+^{1/2}$.

We conclude this introduction by presenting two open problems. Here, we use the term soliton instead of traveling wave, so that we put into light several connections with existing works. The first problem is the soliton resolution, which consists in writing any solution as a superposition of solitons and radiation. For the KdV equation, this property was rigorously stated in [26] for initial data to which the Inverse

Scattering Transform applies. Therefore, for the Szëgo equation, one needs to solve inverse spectral problems for the Hankel operators and also find explicit action angle coordinates.

The second open problem is the interaction of solitons with external potentials. Consider the Szëgo equation with a linear potential, where initial data are taken to be of the form (3.1.5). As in the works of Holmer and Zworski [49] and Perelman [73], it would be interesting to investigate if solutions of the perturbed Szëgo equation can be approximated by traveling wave solutions to the original Szegö equation (3.1.2).

3.2 A Kronecker-type theorem

A theorem by Kronecker asserts in the setting of $\mathbb{S}^1$ that the set of symbols u such that H_u is of rank N is precisely a $2N$-dimensional complex submanifold of $L^2_+(\mathbb{S}^1)$ containing only rational fractions. In this section, we prove the analogue of this theorem in the case of $L^2_+(\mathbb{R})$. For a different proof of a similar result on some Hankel operators on $L^2_+(\mathbb{R})$ defined in a slightly different way, we refer to Lemma 8.12, p.54 in [72].

Definition 17. *Let $N \in \mathbb{N}^*$. We denote by $\mathcal{M}(N)$ the set of rational fractions of the form*

$$\frac{A(z)}{B(z)},$$

where $A \in \mathbb{C}_{N-1}[z]$, $B \in \mathbb{C}_N[z]$, $0 \leq \deg(A) \leq N-1$, $\deg(B) = N$, $B(0) = 1$, $B(z) \neq 0$, for all $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, and A and B have no common factors.

Theorem 3.2.1. *The function u belongs to $\mathcal{M}(N)$ if and only if the Hankel operator H_u has complex rank N.*

Moreover, if $u \in \mathcal{M}(N)$, $u(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, where $B(z) = \prod_{j=1}^J (z-p_j)^{m_j}$, with $\sum_{j=1}^J m_j = N$ and $\mathrm{Im} p_j < 0$ for all $j = 1, 2, ..., J$, then the range of H_u is given by

$$\operatorname{Ran} H_u = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{1}{(z-p_j)^m}, 1 \leq m \leq m_j \right\}_{j=1}^J \tag{3.2.1}$$

Démonstration. The theorem will follow once we prove :

(i) $u \in \mathcal{M}(N) \Longrightarrow \mathrm{rk}(H_u) \leq N$
(ii) $\mathrm{rk}(H_u) = N \Longrightarrow u \in \mathcal{M}(N)$.

Let us first prove (i). Let $u \in \mathcal{M}(N)$, i.e. u is a linear combination of

$$\frac{1}{(z-p)^m},$$

where $\mathrm{Im}p < 0$, $1 \leq m \leq m_p$, and $\sum m_p = N$. Then, computing the integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{(x-p)^m} dx,$$

using the residue theorem, we obtain that $\hat{u}(\xi) = 0$ for all $\xi \leq 0$ and $\hat{u}(\xi)$ is a linear combination of $\xi^{m-1}e^{-ip\xi}$, with $1 \leq m \leq m_p$, for $\xi > 0$.

Given $h \in L^2_+$, we have $\widehat{H_u(h)}(\xi) = 0$ for $\xi < 0$. Moreover, for $\xi > 0$, we have

$$\begin{aligned}
\widehat{H_u(h)}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \hat{u}(\xi-\eta)\hat{\bar{h}}(\eta)d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{u}(\xi+\eta)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta \\
&= \sum_{\substack{1\leq m\leq m_p \\ \sum m_p = N}} c_{m,p}\left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \xi^{m-1-k}\int_0^\infty \eta^k \overline{\hat{h}}(\eta)e^{-ip\eta}d\eta\right)e^{-ip\xi} \\
&= \sum_{\substack{1\leq m\leq m_p \\ \sum m_p = N}} \tilde{d}_{m,p}(u,h)\xi^{m-1}e^{-ip\xi} = \sum_{\substack{1\leq m\leq m_p \\ \sum m_p = N}} d_{m,p}(u,h)\left(\frac{1}{(x-p)^m}\right)^{\wedge}(\xi),
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

where $c_{m,p}$, $\tilde{d}_{m,p}$, $d_{m,p}$ are constants depending on p and m.

Hence,

$$H_u(h)(x) = \sum_{\substack{1\leq m\leq m_p \\ \sum m_p = N}} \frac{d_{m,p}(u,h)}{(x-p)^m} \tag{3.2.3}$$

and $\mathrm{rk}(H_u) \leq N$.

Let us now prove (ii). Assume that $\mathrm{rank}(H_u) = N$, i.e. the range of H_u, $\mathrm{Ran}\, H_u$, is a $2N$-dimensional real vector space. As H_u is $\mathbb{C}$-antilinear, one can choose a basis of $\mathrm{Ran}\, H_u$ of eigenvectors of H_u in the following way :

$$\{v_1, iv_1, ..., v_N, iv_N\, ;\, H_u(v_j) = \lambda_j v_j, \lambda_j > 0, j = 1, 2, \dots, N\}$$

Let $w_j = \sqrt{\lambda_j}v_j$. If $h \in L^2_+$, then by Parseval's identity we have

$$\begin{aligned}
H_u(h) &= \sum_{j=1}^N (H_u(h), v_j)v_j + \sum_{j=1}^N (H_u(h), iv_j)iv_j = 2\sum_{j=1}^N (H_u(h), v_j)v_j \\
&= 2\sum_{j=1}^N (H_u(v_j), h)v_j = 2\sum_{j=1}^N (\lambda_j v_j, h)v_j = 2\sum_{j=1}^N (w_j, h)w_j
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \Big(\int_0^\infty \hat{w}_j(\eta)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta \Big) w_j.$$

Consequently,

$$\widehat{H_u(h)}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{\xi \geq 0} \int_0^\infty \hat{u}(\xi+\eta)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\xi \geq 0} \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty \hat{w}_j(\eta)\hat{w}_j(\xi)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta.$$

and hence,

$$\mathbf{1}_{\xi \geq 0} \int_0^\infty \Big(\hat{u}(\xi+\eta) - 2\sum_{j=1}^{N} \hat{w}_j(\eta)\hat{w}_j(\xi) \Big) \overline{\hat{h}}(\eta)d\eta = 0,$$

for all $h \in L^2_+$. Therefore, for all $\xi, \eta \geq 0$, we have

$$\hat{u}(\xi+\eta) = 2\sum_{j=1}^{N} \hat{w}_j(\eta)\hat{w}_j(\xi). \tag{3.2.4}$$

Let $L > 2N+1$ be an even integer and ϕ be the probability density function of the chi-square distribution defined by

$$\phi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{L}{2}}\Gamma(\frac{L}{2})} \xi^{\frac{L}{2}-1} e^{-\frac{\xi}{2}}, \text{ if } \xi \geq 0 \\ 0, \text{ if } \xi < 0, \end{cases}$$

where Γ is the Gamma function. Then, its Fourier transform is

$$\widehat{\phi}(x) = (1+2ix)^{-\frac{L}{2}}.$$

Notice that $\phi \in H^N(\mathbb{R})$ since

$$\|\phi\|^2_{H^N} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle x \rangle^{2N}}{|1+2ix|^L} dx$$

which is convergent if and only if $2N - L < -1$.

Let $\langle \theta, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\psi(x)$ for all $\theta \in H^{-N}(\mathbb{R})$ and $\psi \in H^N(\mathbb{R})$. Consider the matrix A_ϕ defined by :

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{w}_1, \phi \rangle & \langle \hat{w}_1', \phi \rangle & \cdots & \langle \hat{w}_1^{(N)}, \phi \rangle \\ \langle \hat{w}_2, \phi \rangle & \langle \hat{w}_2', \phi \rangle & \cdots & \langle \hat{w}_2^{(N)}, \phi \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \hat{w}_N, \phi \rangle & \langle \hat{w}_N', \phi \rangle & \cdots & \langle \hat{w}_N^{(N)}, \phi \rangle \end{pmatrix}$$

Since $\mathrm{rk}(A_\phi) \leq N$, it results that there exists $(c_0, c_1, \ldots, c_N) \neq 0$ such that

$$\Big\langle \sum_{k=0}^{N} c_k \hat{w}_j{}^{(k)}, \phi \Big\rangle = 0,$$

for all $j = 1, 2, \ldots, N$. Then, since $\operatorname{supp}\phi \subset [0, \infty)$ and by (3.2.4), we have for all $\eta \geq 0$ that

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \Big\langle c_k \hat{u}^{(k)}(\xi), \phi(\xi - \eta) \Big\rangle_\xi &= \sum_{k=0}^{N} \Big\langle c_k \hat{u}^{(k)}(\xi + \eta), \phi(\xi) \Big\rangle_\xi \\
&= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_k \int_0^\infty \hat{u}(\xi + \eta) \phi^{(k)}(\xi) d\xi \\
&= 2 \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_k \int_0^\infty \Big(\sum_{j=1}^{N} \hat{w}_j(\eta) \hat{w}_j(\xi) \Big) \phi^{(k)}(\xi) d\xi \\
&= 2 \sum_{j=1}^{N} \hat{w}_j(\eta) \sum_{k=0}^{N} c_k \Big\langle \hat{w}_j^{(k)}(\xi), \phi(\xi) \Big\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Denote $T = \sum_{k=0}^{N} c_k \hat{u}^{(k)}$. Then $T \in H^{-N}$ and $\operatorname{supp} T \in [0, \infty)$. We have just proved that for all $\eta \geq 0$

$$\begin{aligned}
0 = \langle T, \phi(\cdot - \eta) \rangle = \int_{\mathbb{R}} T(\xi) \phi(\xi - \eta) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} T(\xi) \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(\xi - \eta)}}{(1 + 2ix)^{L/2}} dx \Big) d\xi \\
= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} T(\xi) e^{ix\xi} d\xi \Big) \frac{e^{-ix\eta}}{(1 + 2ix)^{L/2}} dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1} T(x) \frac{e^{-ix\eta}}{(1 + 2ix)^{L/2}} dx.
\end{aligned}$$

Denoting $R(x) := \frac{1}{(1+2ix)^{L/2}} \mathcal{F}^{-1} T(x)$, we have $\hat{R} \in H^{L/2 - N}(\mathbb{R}) \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$ and

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R(x) e^{-ix\eta} dx = \hat{R}(\eta), \text{ for all } \eta \geq 0.$$

Thus $\operatorname{supp} \hat{R} \subset (-\infty, 0]$. By the definition of R, $(1 - 2D_\xi)^{L/2} \hat{R}(\xi) = T(\xi)$. Since the left hand-side is supported on $(-\infty, 0]$ and the right hand-side is supported on $[0, \infty)$, we deduce that $\operatorname{supp} T \subset 0$. In particular, $T_{|\xi > 0} = 0$. This yields that $\hat{u}_{|\xi > 0}$ is a weak solution on $(0, \infty)$ of the following linear ordinary differential equation :

$$\sum_{k=0}^{N} c_k v^{(k)}(\xi) = 0. \tag{3.2.5}$$

Then, by [51, Theorem 4.4.8, p.115], we have that $\hat{u}_{|\xi>0} \in C^N((0,\infty))$, $\hat{u}_{|\xi>0}$ is a classical solution of this equation and therefore it is a linear combination of

$$\xi^{m-1} e^{q\xi}$$

where $q \in \mathbb{C}$ is a root of the polynomial $P(X) = \sum_{k=0}^{N} c_k X^k$ with multiplicity m_q, $1 \leq m \leq m_q$, and $\sum_q m_q = N$. Note that we must have $\operatorname{Re} q < 0$, because $u \in L^2_+(\mathbb{R})$. Therefore we will denote $q = -ip$, with $\operatorname{Im} p < 0$ and obtain that $\hat{u}(\xi)$ is a linear combination of $\xi^{m-1} e^{-ip\xi}$ for $\xi > 0$. By the hypothesis $u \in L^2_+(\mathbb{R})$, we obtain $\hat{u}(\xi) = 0$ for $\xi \leq 0$. Hence for all $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{u}(\xi)$ is a linear combination of $\left(\frac{1}{(x-p)^m}\right)^{\wedge}(\xi)$, with $1 \leq q \leq m_q$ and $\sum m_q = N$. Thus $u \in \mathcal{M}(N')$ for some $N' \leq N$. If $N' < N$, then (i) yields $\operatorname{rk}(H_u) \leq N'$, which contradicts our assumption. In conclusion $u \in \mathcal{M}(N)$.

Finally, when $u \in \mathcal{M}(N)$ we have $\operatorname{rk}(H_u) = N$ and equation (3.2.3), and thus (3.2.1) follows. □

As a consequence of (3.2.1) we make the following remark.

Remark 3.2.2. *If $u \in \mathcal{M}(N)$, then $u \in \operatorname{Ran} H_u$.*

3.3 Spectral properties of the operator A_u for a soliton u

Let us first recall the definition and the basic properties of the generalized wave operators, which are the main objects in scattering theory. We refer to chapter XI in [81] for more details.

Let A and B be two self-adjoint operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$. The basic principle of scattering theory is to compare the free dynamics corresponding to e^{-iAt} and e^{-iBt}. The fact that $e^{-iBt}\phi$ "looks asymptotically free" as $t \to -\infty$, with respect to A, means that there exists $\phi_+ \in \mathcal{H}$ such that

$$\lim_{t \to -\infty} \|e^{-iBt}\phi - e^{-itA}\phi_+\| = 0$$

or equivalently,

$$\lim_{t \to -\infty} \|e^{iAt} e^{-itB}\phi - \phi_+\| = 0.$$

Hence, we reduced ourselves to the problem of the existence of a strong limit. Let $\mathcal{H}_{\text{ac}}(B)$ be the absolutely continuous subspace for B and let $P_{\text{ac}}(B)$ be the orthogonal projection onto this subspace. In the definition of the generalized wave operators we have $\phi \in \mathcal{H}_{\text{ac}}(B)$.

We say that the generalized wave operators exist if the following strong limits exist :

$$\Omega^{\pm}(A,B)=\lim_{t\to\mp\infty}e^{itA}e^{-itB}P_{\mathrm{ac}}(B). \tag{3.3.1}$$

The wave operators $\Omega^{\pm}(A,B)$ are partial isometries with initial subspace $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(B)$ and with values in Ran $\Omega^{\pm}(A,B)$. Moreover, $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A,B)\subset\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$. If $\operatorname{Ran}\Omega^{\pm}(A,B)=\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$, we say that the generalized wave operators are complete.

Lastly, we note that the following equality holds :

$$A\Omega^{\pm}(A,B)=\Omega^{\pm}(A,B)B. \tag{3.3.2}$$

Lemma 3.3.1. *If $u\in H^{1/2}_{+}$ is a traveling wave, then $u\in H^{s}_{+}(\mathbb{R})$ for all $s\geq 0$. In particular, by Sobolev embedding theorem, we have $u\in L^{p}(\mathbb{R})$ for $2\leq p\leq\infty$.*

Démonstration. Because $u\in H^{1/2}(\mathbb{R})$, the Sobolev embedding theorem yields $u\in L^{p}(\mathbb{R})$, for all $2\leq p<\infty$. Therefore $|u|^{2}u\in L^{2}(\mathbb{R})$ and thus $\Pi(|u|^{2}u)\in L^{2}_{+}$. Using equation (3.1.4)

$$cDu+\omega u=\Pi(|u|^{2}u),$$

we deduce that $Du\in L^{2}_{+}$. Consequently, $u\in H^{1}_{+}$ and by Sobolev embedding theorem we have $u\in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Then $u^{2}D\bar{u},|u|^{2}Du\in L^{2}(\mathbb{R})$. Applying the operator D to both sides of equation (3.1.4), we obtain $D^{2}u\in L^{2}(\mathbb{R})$ and hence $u\in H^{2}_{+}$. Iterating this argument infinitely many times, the conclusion follows. □

Proposition 3.3.2. *Let u be a traveling wave. Then, $(A_{u}+i)^{-1}-(D+i)^{-1}$ is a trace class operator.*

Démonstration. We prove first that for all $f\in L^{2}(\mathbb{R})$, the operator $(D+i)^{-1}f$, defined on $L^{2}(\mathbb{R})$ by

$$\big((D+i)^{-1}f\big)h(x)=(D+i)^{-1}(fh)(x)$$

is Hilbert-Schmidt. Denote by $\mathcal{F}$ the Fourier transform. Using the isomorphism of $L^{2}(\mathbb{R})$ induced by the Fourier transform, we have that $(D+i)^{-1}f$ is a Hilbert-Schmidt operator if and only if $\mathcal{F}(D+i)^{-1}f$ is a Hilbert-Schmidt operator. The latter is an integral operator of kernel $K(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\xi+i}\hat{f}(\xi-\eta)$. Indeed,

$$\mathcal{F}\big((D+i)^{-1}fh\big)(\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\xi+i}\widehat{fh}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\xi+i}\hat{f}(\xi-\eta)\hat{h}(\eta)d\eta=\int_{\mathbb{R}}K(\xi,\eta)\hat{h}(\eta)d\eta.$$

Therefore, it is Hilbert-Schmidt if and only if $K(\xi,\eta)\in L^{2}_{\xi,\eta}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. By the change of variables $\eta\mapsto\zeta=\xi-\eta$ we have

$$\|K(\xi,\eta)\|^{2}_{L^{2}_{\xi,\eta}}=\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi}{\xi^{2}+1}\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\zeta)|^{2}d\zeta=C\|f\|^{2}_{L^{2}}<\infty.$$

Hence $(D+i)^{-1}f$ is a Hilbert-Schmidt operator and so is $\bar{f}(D+i)^{-1}$, its adjoint. According to Lemma 3.3.1, $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ and thus $|u|^2 \in L^2(\mathbb{R})$. Taking $f = |u|^2$ and $f = u$, we conclude that the operators $(D+i)^{-1}|u|^2$, $(D+i)^{-1}u$, and $\bar{u}(D+i)^{-1}$ are all Hilbert-Schmidt.

We write

$$\begin{aligned}(A_u+i)^{-1} - (D+i)^{-1} &= (D+i)^{-1}(D-A_u)(A_u+i)^{-1} \\ &= \frac{1}{c}(D+i)^{-1}T_{|u|^2}(A_u+i)^{-1} \\ &= \frac{1}{c}\Pi(D+i)^{-1}|u|^2(A_u+i)^{-1} = L(A_u+i)^{-1},\end{aligned}$$

where $L = \frac{1}{c}\Pi(D+i)^{-1}|u|^2$. Note that L is a Hilbert-Schmidt operator since it is the composition of the bounded operator $\frac{1}{c}\Pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+$ with the Hilbert-Schmidt operator $(D+i)^{-1}|u|^2$. Finally, we write, using the latter formula twice

$$\begin{aligned}(A_u+i)^{-1} - (D+i)^{-1} &= L(L(A_u+i)^{-1} + (D+i)^{-1}) \\ &= L \circ L \circ (A_u+i)^{-1} + \frac{1}{c}\Pi(D+i)^{-1}u \circ \bar{u}(D+i)^{-1}.\end{aligned}$$

We obtain that $(A_u+i)^{-1} - (D+i)^{-1}$ is a trace class operator since the composition of two Hilbert-Schmidt operators is a trace class operator. □

Corollary 3.3.3. *If u is a traveling wave, then the wave operators $\Omega^\pm(D, A_u)$ exist and are complete.*

Démonstration. This easily follows from Kuroda-Birman theorem that we state below [81, Theorem XI.9] :

Let A and B be two self-adjoint operators on a Hilbert space such that $(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}$ is a trace class operator. Then $\Omega^\pm(A, B)$ exist and are complete. □

Corollary 3.3.4. *If u is a traveling wave, then $\sigma_{\mathrm{ac}}(A_u) = [0, +\infty)$.*

Démonstration. Since $\Omega^\pm(D, A_u)$ are complete, it results that they are isometries from $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$ onto $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(D) = L^2_+$. By (3.3.2), we then have

$$A_{u|_{\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)}} = [\Omega^\pm(D, A_u)_{|\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)}]^{-1} D\Omega^\pm(D, A_u)_{|\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)}.$$

Consequently, $\sigma_{\mathrm{ac}}(A_u) = \sigma_{\mathrm{ac}}(D) = [0, +\infty)$. □

Our main goal in the following is to prove $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \operatorname{Ker} H_u$. As we see below, it is enough to prove that $\left[\Omega^+(D, A_u)H_u^2\right](\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)) = 0$.

Lemma 3.3.5. *The operator H_u is a Hilbert-Schmidt operator on $L^2_+(\mathbb{R})$ of Hilbert-Schmidt norm $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_{\dot{H}^{1/2}_+}$.*

Démonstration. Let us denote by $\|T\|_{HS}$ the Hilbert-Schmidt norm of a Hilbert-Schmidt operator T. By (3.2.2), we have

$$\widehat{H_u(h)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{\xi\geq 0}\int_0^\infty \hat{u}(\xi+\eta)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta.$$

Then, we obtain

$$\begin{aligned}H_u(h)(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{ix\xi}\hat{u}(\xi+\eta)\overline{\hat{h}}(\eta)d\eta d\xi\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty e^{ix\xi}e^{iy\eta}\hat{u}(\xi+\eta)d\eta d\xi\right)\bar{h}(y)dy.\end{aligned}$$

Using the fact that the Hilbert-Schmidt norm of an operator is equal to the norm of its integral kernel, Plancherel's formula, and Fubini's theorem, we have

$$\begin{aligned}\|H_u(h)\|^2_{HS} &= \frac{1}{16\pi^4}\left\|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{ix\xi}e^{iy\eta}\hat{u}(\xi+\eta)d\eta d\xi\right\|^2_{L^2_{x,y}} = \frac{1}{4\pi^2}\|\mathbf{1}_{\xi\geq 0}\mathbf{1}_{\eta\geq 0}\hat{u}(\xi+\eta)\|^2_{L^2_{\eta,\xi}}\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty|\hat{u}(\xi+\eta)|^2d\eta d\xi = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_\xi^\infty|\hat{u}(\zeta)|^2d\zeta d\xi\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\left(\int_0^\zeta d\xi\right)|\hat{u}(\zeta)|^2d\zeta = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\zeta|\hat{u}(\zeta)|^2d\zeta = \frac{1}{2\pi}\|u\|^2_{\dot{H}^{1/2}}.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3.6. $\operatorname{Ker} H_u^2 = \operatorname{Ker} H_u$. *Moreover, if* $\operatorname{Ran} H_u$ *is finite dimensional, then* $\operatorname{Ran} H_u^2 = \operatorname{Ran} H_u$.

Démonstration. Let $f\in\operatorname{Ker} H_u^2$. Then, by (3.1.7),

$$(H_u(h_1),h_2) = (H_u(h_2),h_1) \text{ for all } h_1,h_2\in L^2_+,$$

we have

$$\|H_uf\|^2_{L^2} = (H_uf,H_uf) = (H_u^2f,f) = 0$$

and thus $H_uf=0$. Hence, $\operatorname{Ker} H_u^2\subset\operatorname{Ker} H_u$. Therefore, we obtain $\operatorname{Ker} H_u^2 = \operatorname{Ker} H_u$ since the inverse inclusion is obvious.

The identity (3.1.7) yields also $\operatorname{Ker} H_u = (\operatorname{Ran} H_u)^\perp$. Moreover, it implies that H_u^2 is a self-adjoint operator and therefore, $\operatorname{Ker} H_u^2 = (\operatorname{Ran} H_u^2)^\perp$. Hence, we obtain

$$(\operatorname{Ran} H_u^2)^\perp = (\operatorname{Ran} H_u)^\perp.$$

Taking the orthogonal complement of both sides, this yields

$$\overline{\mathrm{Ran} H_u^2} = \overline{\mathrm{Ran} H_u}.$$

If $\mathrm{Ran} H_u$ is finite dimensional, so is $\mathrm{Ran} H_u^2$, since $\mathrm{Ran} H_u^2 \subset \mathrm{Ran} H_u$. Thus, $\mathrm{Ran} H_u^2$ and $\mathrm{Ran} H_u$ are closed. Hence, we have $\mathrm{Ran} H_u^2 = \mathrm{Ran} H_u$. □

Lemma 3.3.7. *If u is a traveling wave, then*

$$A_u H_u^2 = H_u^2 A_u. \tag{3.3.3}$$

Consequently, if $\mathrm{Ran} H_u$ *is finite dimensional, then* $A_u(\mathrm{Ran}\, H_u) \subset \mathrm{Ran}\, H_u$.

Démonstration. The commutativity relation (3.3.3) is a consequence of identity (3.1.10). The second statement then follows by Lemma 3.3.6, $\mathrm{Ran}\, H_u^2 = \mathrm{Ran}\, H_u$. □

It is a classical fact that if A and B are two self-adjoint operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$ such that $AB = BA$, then $B\big(\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)\big) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$. For the sake of completeness, we prove it here in the case of the operators A_u and H_u^2.

Lemma 3.3.8. $H_u^2 \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$.

Démonstration. As we see below, the inclusion follows if we prove that $\mu_{H_u^2\phi} \ll \mu_\phi$ for all $\phi \in L^2_+$, where the measures above are the spectral measures with respect to the operator A_u, corresponding respectively to $H_u^2\phi$ and ϕ.

Let $E \subset \mathbb{R}$ be a measurable set and $f = \mathbf{1}_E$. Then, by (3.3.3) and the Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\begin{aligned}
\mu_{H_u^2\phi}(E) &= \int_{\mathbb{R}} f d\mu_{H_u^2\phi} = (H_u^2\phi, f(A_u)H_u^2\phi) \\
&= (H_u^2\phi, H_u^2 f(A_u)\phi) = (H_u^4\phi, f(A_u)\phi) \\
&\leq \sqrt{(f(A_u)\phi, f(A_u)\phi)}\|H_u^4\phi\|_{L^2} = \sqrt{(\phi, f(A_u)\phi)}\|H_u^4\phi\|_{L^2} \\
&= \sqrt{\mu_\phi(E)}\|H_u^4\phi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Therefore, $\mu_{H_u^2\phi} \ll \mu_\phi$.

Let us denote by m the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. If $\phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$, then $\mu_\phi \ll m$ and thus $\mu_{H_u^2\phi} \ll m$. Hence, $H_u^2\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$. □

Proposition 3.3.9. *If u is a traveling wave, then $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \mathrm{Ker}\, H_u$.*

Démonstration. It is enough to prove that $\left[\Omega^+(D,A_u)H_u^2\right]\left(\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)\right) = 0$. If this holds, then we have $H_u^2\left(\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)\right) = 0$ since $H_u^2\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$ and $\Omega^+(D,A_u)$ is an isometry on $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$. Therefore, $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u) \subset \operatorname{Ker} H_u^2 = \operatorname{Ker} H_u$.

Let us first note that

$$H_u e^{itD} = e^{itD} H_{\tau_t(u)}, \tag{3.3.4}$$

where τ_a denotes the translation $\tau_a u(x) = u(x-a)$. Indeed, for $f \in L^2_+$, passing into the Fourier space, we have

$$\begin{aligned}
\left(H_u e^{itD} f\right)^\wedge(\xi) &= \mathbf{1}_{\xi\geq 0}\left(u\overline{e^{itD}f}\right)^\wedge(\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{\xi\geq 0}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi-\eta)e^{it\eta}\hat{\bar{f}}(\eta)d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{\xi\geq 0}e^{it\xi}\int e^{-it(\xi-\eta)}\hat{u}(\xi-\eta)\hat{\bar{f}}(\eta)d\eta = \mathbf{1}_{\xi\geq 0}e^{it\xi}\left(\tau_t(u)\bar{f}\right)^\wedge(\xi) \\
&= \mathbf{1}_{\xi\geq 0}\left(e^{itD}(\tau_t(u)\bar{f})\right)^\wedge(\xi) = \left(e^{itD}H_{\tau_t(u)}f\right)^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

By Lemma 3.3.8, (3.3.3), and (3.3.4), we have for all $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)$

$$\begin{aligned}
e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}H_u^2 f &= e^{itD}e^{-itA_u}H_u^2 f = e^{itD}H_u^2 e^{-itA_u} f = e^{itD}H_u H_u e^{-itD}e^{itD}e^{-itA_u} f \\
&= e^{itD}H_u e^{-itD}H_{\tau_{-t}(u)}e^{itD}e^{-itA_u} f = H^2_{\tau_{-t}(u)}e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}(A_u)f.
\end{aligned}$$

We intend to prove that $H^2_{\tau_{-t}(u)}e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}(A_u)f$ tends to 0 in the L^2_+-norm as $t \to -\infty$. From this, we conclude that $\Omega^+(D,A_u)H_u^2 f = 0$.

Since, by Lemma 3.3.5, $H_{\tau_{-t}(u)}$ is a uniformly bounded operator, it is enough to prove that $H_{\tau_{-t}(u)}e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}(A_u)f$ tends to 0.

$$\begin{aligned}
&\|H_{\tau_{-t}(u)}e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}(A_u)f\|_{L^2_+} \\
&\qquad\leq \left\|H_{\tau_{-t}(u)}\left(e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}(A_u)f - \Omega^+(D,A_u)f\right)\right\|_{L^2_+} \\
&\qquad\qquad + \|H_{\tau_{-t}(u)}\Omega^+(D,A_u)f\|_{L^2_+} \\
&\qquad\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_{\dot{H}^{1/2}}\|e^{itD}e^{-itA_u}P_{\mathrm{ac}}(A_u)f - \Omega^+(D,A_u)f\|_{L^2_+} \\
&\qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}} |u(x+t)|^2|\Omega^+(D,A_u)f(x)|^2 dx
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

The first term in (3.3.5) converges to 0 by the definition of the wave operator $\Omega^+(D,A_u)$.

Since u is a traveling wave,

$$u \in \bigcap_{s\geq 0} H^s(\mathbb{R}) \subset C^\infty_{\to 0}(\mathbb{R}),$$

where $C^\infty_{\to 0}(\mathbb{R})$ is the space of functions f of class C^∞ such that $\lim_{x\to-\infty} D^k f(x) = \lim_{x\to\infty} D^k f(x) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$. Therefore, for arbitrary fixed x, we have

$$\lim_{t\to-\infty} \tau_{-t}(u)(x) = \lim_{t\to-\infty} u(x+t) = 0.$$

Note also that $|u(x+t)|^2|\Omega^+(D, A_u)f(x)|^2 \leq \|u\|_{L^\infty}|\Omega^+(D, A_u)f(x)|^2$ for all $x \in \mathbb{R}$. Then the second term in (3.3.5) converges to 0 by the dominated convergence theorem. Hence $\left[\Omega^+(D, A_u)H_u^2\right]\left(\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_u)\right) = 0$. $\square$

3.4 Classification of traveling waves

Lemma 3.4.1. *There are no nontrivial traveling waves of velocity $c = 0$ in $L^2_+(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Let u be a nontrivial traveling wave of velocity $c = 0$. Then, equation 3.1.4 gives $\Pi(|u|^2 u) = \omega u$. Taking the scalar product with $e^{i\xi x}u(x)$, where $\xi \geq 0$, we obtain

$$\mathcal{F}(|u|^4 - \omega|u|^2)(\xi) = 0,$$

where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier transform. Since $|u|^4 - \omega|u|^2$ is a real valued function, we have that the last equality holds for all $\xi \in \mathbb{R}$. Thus $|u|^4 - \omega|u|^2 = 0$ on $\mathbb{R}$ and therefore $u(x) = 0$ or $|u(x)|^2 = \omega > 0$, for all $x \in \mathbb{R}$. Since the function u is holomorphic on $\mathbb{C}_+$, its trace on $\mathbb{R}$ is either identically zero, or the set of zeros of u on $\mathbb{R}$ has Lebesgue measure zero. In conclusion, we have $|u|^2 = \omega > 0$ a.e. on $\mathbb{R}$ and thus u is not a function in $L^2_+(\mathbb{R})$.

$\square$

Lemma 3.4.2. *If $u \in H^s_+$ for $s > \frac{1}{2}$ and $v \in \operatorname{Ker} H_u$, then $\bar{u}v \in L^2_+$. Moreover, if $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, then $T_{|u|^2}v = |u|^2 v$.*

Démonstration. Indeed, $0 = H_u(v) = \Pi(u\bar{v})$ and thus $\bar{u}v \in L^2_+$. Furthermore, since $u, \bar{u}v \in L^2_+$, we obtain $T_{|u|^2}v = \Pi(u\bar{u}v) = |u|^2 v$. $\square$

Lemma 3.4.3. *Let $u \in H^s_+$, $s > \frac{1}{2}$, be a solution of the cubic Szegö equation* (3.1.2). *Consider the following Cauchy problem :*

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = |u(t)|^2 \psi \\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

If $\psi_0 \in \operatorname{Ker} H_{u(0)}$, then $\psi(t) \in \operatorname{Ker} H_{u(t)}$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Let us first consider :

$$\begin{cases} i\partial_t \psi_1 = T_{|u(t)|^2}\psi_1 \\ \psi_1\big|_{t=0} = \psi_0, \end{cases}$$

Using the Lax pair structure, we have

$$\begin{aligned} \partial_t H_u(\psi_1) &= [B_u, H_u]\psi_1 + H_u \partial_t \psi_1 = [\frac{i}{2}H_u^2 - iT_{|u|^2}, H_u]\psi_1 + H_u(-iT_{|u|^2}\psi_1) \\ &= -iT_{|u|^2}H_u\psi_1 - iH_uT_{|u|^2}\psi_1 + iH_uT_{|u|^2}\psi_1 = -iT_{|u|^2}H_u\psi_1. \end{aligned}$$

The solution of this linear Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t H_u(\psi_1) = -iT_{|u|^2}H_u\psi_1 \\ H_u(\psi_1(0)) = 0 \end{cases}$$

is identically zero. i.e., $H_{u(t)}\psi_1(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. Consequently, $\psi_1(t) \in \operatorname{Ker} H_{u(t)}$ and by Lemma 3.4.2 we obtain $T_{|u|^2}\psi_1 = |u|^2\psi_1$. In conclusion,
$\psi(t) = \psi_1(t) \in \operatorname{Ker} H_{u(t)}$. □

The space $\operatorname{Ker} H_u$ is invariant under multiplication by $e^{i\alpha x}$, for all $\alpha \geq 0$. Indeed, suppose $f \in \operatorname{Ker} H_u$. Then $\widehat{u\bar{f}}(\xi) = 0$, for all $\xi \geq 0$ and

$$\big(H_u(e^{i\alpha x}f)\big)^\wedge(\xi) = \big(e^{-i\alpha x}u\bar{f}\big)^\wedge(\xi) = \widehat{u\bar{f}}(\xi+\alpha) = 0,$$

for all $\xi, \alpha \geq 0$. Hence, $e^{i\alpha x}f \in \operatorname{Ker} H_u$ for all $\alpha \geq 0$.

One can then apply the following theorem to the subspaces $\operatorname{Ker} H_{u_0}$.

Proposition 3.4.4 (Lax [58]). *Every non-empty closed subspace of L^2_+ which is invariant under multiplication by $e^{i\alpha x}$ for all $\alpha \geq 0$ is of the form FL^2_+, where F is an analytic function in the upper-half plane, $|F(z)| \leq 1$ for all $z \in \mathbb{C}_+$, and $|F(x)| = 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Moreover, F is uniquely determined up to multiplication by a complex constant of absolute value 1.*

We deduce that $\operatorname{Ker} H_{u_0} = \phi L^2_+$, where ϕ is a holomorphic function in the upper half-plane $\mathbb{C}_+$, satisfying $|\phi(x)| = 1$ on $\mathbb{R}$ and $|\phi(z)| \leq 1$ for all $z \in \mathbb{C}_+$.

Functions satisfying the properties in Lax's theorem are called inner functions in the sense of Beurling-Lax. A special class of inner functions is given by the Blaschke products. Given $\lambda_j \in \mathbb{C}$ such that for all j

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0$$

and

$$\sum_j \frac{\operatorname{Im}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < \infty,$$

the corresponding Blaschke product is defined by

$$B(z) = \prod_j \varepsilon_j \frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda}_j}, \tag{3.4.2}$$

where $\varepsilon_j = \frac{|\lambda_j^2+1|}{\lambda_j^2+1}$ (by definition $\varepsilon_j = 1$ if $\lambda_j = 1$).

Inner functions have a canonical factorization, which is analogous to the canonical factorization of inner functions on the unit disk, see [82, Theorem 17.15], [69, Theorem 6.4.4]. More precisely, every inner function F can be written as the product

$$F(z) = \lambda B(z) e^{iaz} e^{i\int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z} d\nu(t)}, \tag{3.4.3}$$

where $z \in \mathbb{C}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$ with $|\lambda| = 1$, $a \geq 0$, B is a Blaschke product, and ν is a positive singular measure with respect to the Lebesgue measure. In particular, the inner function ϕ has such a canonical factorization.

Proposition 3.4.5. *Let u be a traveling wave and denote by ϕ an inner function such that* $\operatorname{Ker} H_{u_0} = \phi L^2_+$. *Then, ϕ satisfies the following equation on $\mathbb{R}$:*

$$cD\phi = |u_0|^2\phi. \tag{3.4.4}$$

Démonstration. Since $u(t,x) = e^{-i\omega t}u_0(x-ct)$, we have $H_{u(t)} = e^{-i\omega t}\tau_{ct}H_{u_0}\tau_{-ct}$. Thus,

$$\operatorname{Ker} H_{u(t)} = \tau_{ct}\operatorname{Ker} H_{u_0} = \tau_{ct}(\phi)L^2_+.$$

Let $f \in L^2_+$ and let $\psi_0 = \phi f \in \operatorname{Ker} H_{u_0}$ be the initial data of the Cauchy problem (3.4.1) in Lemma 3.4.3. We then have $\phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds} f \in \operatorname{Ker} H_{u(t)}$. Therefore,

$$\phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds} L^2_+ \subset \tau_{ct}(\phi)L^2_+. \tag{3.4.5}$$

Conversely, by solving backward the problem (3.4.1) with the initial data in $\tau_{ct}(\phi)L^2_+$ at time t, up to the time $t = 0$, we obtain

$$\tau_{ct}(\phi)L^2_+ \subset \phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds} L^2_+$$

and thus, the two sets are equal.

Let us first prove that $\phi_t := \phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds}$ is an inner function. Note that ϕ_t is well defined on $\mathbb{R}$ and its absolute value is 1 on $\mathbb{R}$. Consider the function defined by

$h(x) = \frac{\phi_t(x)}{x+i}$, for all $x \in \mathbb{R}$. Since $h \in L^2_+$, we can write using the Poisson integral that

$$h(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{h(x)}{|z-x|^2}dx,$$

for all $z \in \mathbb{C}_+$. Then,

$$zh(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{xh(x)}{|z-x|^2}dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{(z-x)h(x)}{|z-x|^2}dx.$$

Note that the last integral is equal to $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{h(x)}{\bar{z}-x}dx$. By the residue theorem and using the fact that the function $\frac{h}{\bar{z}-x}$ is holomorphic on $\mathbb{C}_+$, we have that this integral is zero and thus

$$zh(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{xh(x)}{|z-x|^2}dx.$$

Therefore, we can use the Poisson integral to extend ϕ_t to $\mathbb{C}_+$ as a holomorphic function.

$$\phi_t(z) = (z+i)h(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{(x+i)h(x)}{|z-x|^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{\phi_t(x)}{|z-x|^2}dx. \quad (3.4.6)$$

Moreover,

$$|\phi_t(z)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{1}{|z-x|^2}dx = 1,$$

for all $z \in \mathbb{C}_+$. Hence ϕ_t is an inner function.

Since $\tau_{ct}(\phi)$ and $\phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds}$ are inner functions and

$$\phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds} L^2_+ = \tau_{ct}(\phi) L^2_+,$$

Proposition 3.4.4 yields the existence of a real valued function γ such that $\gamma(0) = 0$ and

$$\phi e^{-i\int_0^t |u_s|^2 ds} = \tau_{ct}(\phi) e^{i\gamma(t)}.$$

Taking the derivative with respect to t we obtain that ϕ satisfies the following equation :

$$cD\phi(x) = |u(t, x+ct)|^2 \phi(x) + \dot{\gamma}(t)\phi(x).$$

for all $t \in \mathbb{R}$. Since u is a traveling wave, we have $|u(t, x+ct)| = |e^{-i\omega t}u_0(x)| = |u_0(x)|$. Then we deduce that $\dot{\gamma}(t) = k$ and hence $\gamma(t) = kt$, for some $k \in \mathbb{R}$. Therefore,

$$cD\phi = (|u_0|^2 + k)\phi. \quad (3.4.7)$$

We prove in the following that $k = 0$. First, note that $\frac{k}{c} \geq 0$. The function $\phi u_0 \in \mathrm{Ker} H_{u_0}$ and by Lemma 3.4.2, we have $|u_0|^2\phi = \overline{u}_0(u_0\phi) \in L^2_+$. If $\frac{k}{c}$ is negative, denoting $\chi := \frac{1}{c}|u_0|^2\phi \in L^2_+$ and passing into the Fourier space, we have :

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\xi - \frac{k}{c}}\hat{\chi}(\xi)\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\xi).$$

This implies that $\phi \in L^2_+$, contradicting $|\phi(x)| = 1$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Let us now prove that $\frac{k}{c} = 0$. Let $h \in L^2_+$ regular. Then $\phi h \in \mathrm{Ker}\, H_{u_0}$ and by equation (3.4.7) we have

$$A_{u_0}(\phi h) = (D - \tfrac{1}{c}|u_0|^2)(\phi h) = \phi(D - \tfrac{1}{c}|u_0|^2)(h) + hD\phi = \phi(D + \tfrac{k}{c})h.$$

Denoting by $\mu_{\phi h}(A_{u_0})$ the spectral measure corresponding to ϕh, we have

$$\begin{aligned}\int f d\mu_{\phi h} &= (\phi h, f(A_{u_0})\phi h) = (\phi h, \phi f(D + \tfrac{k}{c})h) = (h, f(D + \tfrac{k}{c})h)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(\xi + \tfrac{k}{c})|\hat{h}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{k}{c}}^\infty f(\eta)|\hat{h}(\eta - \tfrac{k}{c})|^2 d\eta.\end{aligned}$$

Consequently, $\mathrm{supp}\,\mu_{\phi h}(A_{u_0}) \subset [\frac{k}{c}, +\infty)$. By Proposition 3.3.9, we have $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_{u_0}) \subset \mathrm{Ker}\, H_{u_0}$, and therefore

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(A_{u_0}) = \overline{\bigcup_{\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A_{u_0})} \mathrm{supp}\,\mu_\psi} \subset \overline{\bigcup_{\phi h \in \mathrm{Ker} H_{u_0}} \mathrm{supp}\,\mu_{\phi h}} \subset \left[\tfrac{k}{c}, \infty\right).$$

Since, by Corollary 3.3.4, $\sigma_{\mathrm{ac}}(A_{u_0}) = [0, \infty)$, this yields $k = 0$. □

Proposition 3.4.6. *All traveling waves are rational fractions.*

Démonstration. We first prove that ϕ is a Blaschke product.

Since ϕ is an inner function in the sense of Beurling-Lax, it has the following canonical decomposition :

$$\phi(z) = \lambda B(z)e^{iaz}e^{i\int_{\mathbb{R}}\frac{1+tz}{t-z}d\nu(t)}, \tag{3.4.8}$$

where $z \in \mathbb{C}_+$, λ is a complex number of absolute value 1, $a \geq 0$, B is a Blaschke product having exactly the same zeroes as ϕ, and ν is a positive singular measure with respect to the Lebesgue measure.

Because ϕ satisfies the equation (3.4.4) and $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, we obtain that ϕ has bounded derivative on $\mathbb{R}$ and hence it is uniformly continuous on $\mathbb{R}$. Then, since ϕ satisfies the Poisson formula (3.4.6), it follows that

$$\phi(x + i\varepsilon) \to \phi(x), \text{ as } \varepsilon \to 0,$$

uniformly for $x \in \mathbb{R}$.

ϕ being uniformly continuous on $\mathbb{R}$ and $|\phi(x)| = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, we deduce that the zeroes of ϕ and hence, those of the Blaschcke product B as well, lie outside a strip $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \mathrm{Im} z \leq \varepsilon_0\}$, for some $\varepsilon_0 > 0$. Therefore, we have

$$\frac{\phi(x+i\varepsilon)}{B(x+i\varepsilon)} \to \frac{\phi(x)}{B(x)}, \text{ as } \varepsilon \to 0$$

uniformly for x in compact subsets of $\mathbb{R}$. Taking the logarithm of the absolute value and noticing that $\left|\frac{\phi(x)}{B(x)}\right| = 1$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2} d\nu(t) \to 0,$$

uniformly for x in compact subsets in $\mathbb{R}$. In particular, for all $\delta > 0$ there exists $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ such that for all $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ and for all $x \in [0,1]$, we have

$$\frac{1}{2\varepsilon}\nu([x-\varepsilon, x+\varepsilon]) \leq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2} d\nu(t) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2} d\nu(t) \leq \delta.$$

Taking $\varepsilon = \frac{1}{2N} \leq \varepsilon_1$ with $N \in \mathbb{N}^*$, we obtain

$$\nu([0,1]) = \nu\Big(\bigcup_{k=0}^{N-1} [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]\Big) \leq N\delta\frac{1}{N} = \delta.$$

In conclusion $\nu([0,1]) = 0$, and one can prove similarly that the measure ν of any compact interval in $\mathbb{R}$ is zero. Hence $\nu \equiv 0$.

Consequently, $\phi(x) = \lambda B(x) e^{iax}$ for all $x \in \mathbb{R}$. On the other hand, because ϕ satisfies the equation (3.4.4), we have $\phi(x) = \phi(0) e^{\frac{i}{c}\int_0^x |u_0|^2}$ and, in particular, $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = \phi(0)e^{\frac{i}{c}\int_0^\infty |u_0|^2}$. Since $\lim_{x\to\infty} B(x) = 1$, we conclude that $a = 0$. Substituting $\phi = \lambda B$ in the equation (3.4.4), we obtain

$$\frac{c}{i}\frac{B'}{B} = |u_0|^2.$$

Then $\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B'(x)}{B(x)}\,dx < \infty$. Computing this integral, we obtain that

$$\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B'(x)}{B(x)}\,dx = 2\sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\lambda_j}{|x-\lambda_j|^2}\,dx = 2\sum_j \pi$$

and thus it is finite if and only if B is a finite Blaschke product, $B(x) = \prod_{j=1}^N \varepsilon_j \frac{x-\lambda_j}{x-\overline{\lambda}_j}$.

Let us prove that the traveling wave u is a rational fraction.

$$\mathrm{Ker}\, H_u = \phi L^2_+ = BL^2_+.$$

Notice that $BL^2_+ = \left(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{x-\overline{\lambda}_j}\right\}_{j=1}^N\right)^{\perp}$. Indeed, $f \in \left(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{x-\overline{\lambda}_j}\right\}_{j=1}^N\right)^{\perp}$ if and only if

$$f(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\lambda_j}\widehat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f}, e^{-i\overline{\lambda}_j\xi}\right) = \left(f, \frac{1}{x-\overline{\lambda}_j}\right) = 0,$$

if and only if there exists $h \in L^2_+$ such that $f = Bh$. Hence

$$\mathrm{Ker}\, H_u = \left(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{x-\overline{\lambda}_j}\right\}_{j=1}^N\right)^{\perp}$$

This yields $\overline{\mathrm{Ran}\, H_u} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{x-\overline{\lambda}_j}\right\}_{j=1}^N$. By Remark 3.2.2 it follows that u is a rational fraction. More precisely, $u \in \mathrm{Ran}\, H_u = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{x-\overline{\lambda}_j}\right\}_{j=1}^N$. □

Proposition 3.4.7. *If u is a traveling wave, then there exists $\lambda > 0$ such that $H_u^2 u = \lambda u$.*

Démonstration. According to Remark 3.2.2, since u is a rational fraction, we have $u \in \mathrm{Ran}\ H_u$.

Secondly, u satisfies the equation of the traveling waves (3.1.4), which is equivalent to $A_u(u) = -\frac{\omega}{c}u$. Therefore, u is an eigenfunction of the operator A_u for the eigenvalue $-\frac{\omega}{c}$. Applying the identity (3.1.10),

$$A_uH_u + H_uA_u + \frac{\omega}{c}H_u + \frac{1}{c}H_u^3 = 0,$$

to u and then to H_uu, one deduces that $A_uH_u^2u = -\frac{\omega}{c}H_u^2u$. Therefore, the conclusion of the proposition follows once we prove all the eigenfunctions of the operator A_u belonging to $\mathrm{Ran}\, H_u$, corresponding to the same eigenvalue, are linearly dependent.

Let a be en eigenvalue of the operator A_u and let $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Ker}\,(A_u - a) \cap \mathrm{Ran}\, H_u$. Since u is a rational fraction, by the Kronecker type theorem 3.2.1, ψ_1 and ψ_2 are also non-constant rational fractions. Then, one can find $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, such that $\psi := \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 = O(\frac{1}{x^2})$ as $x \to \infty$. Moreover, we have $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, $x\psi \in L^2(\mathbb{R})$, and thus we can compute $A_u(x\psi)$.

Passing into the Fourier space we have,

$$\widehat{\Pi(xf)}(\xi) = i(\partial_\xi \hat{f})\mathbf{1}_{\xi\geq 0} = i\partial_\xi(\hat{f}\mathbf{1}_{\xi\geq 0}) - i\hat{f}(\xi)\delta_{\xi=0} = \widehat{x\Pi f}(\xi) - i\hat{f}(0)\delta_{\xi=0},$$

for all $f \in L^1(\mathbb{R})$. Thus, we obtain $\Pi(xf) = x\Pi(f) + \frac{1}{2\pi i}\hat{f}(0)$ for all $f \in L^1(\mathbb{R})$. We then have

$$A_u(x\psi) = xA_u(\psi) + \frac{1}{i}\psi - \frac{1}{2c\pi i}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\psi dx$$

and therefore, since $A_u\psi = a\psi$,

$$A_u(x\psi) = ax\psi + \frac{1}{i}\psi - \frac{1}{2c\pi i}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\psi dx. \tag{3.4.9}$$

Since $x\psi \in \operatorname{Ran} H_u$ and $A_u(\operatorname{Ran} H_u) \subset \operatorname{Ran} H_u$ by Lemma 3.3.7, we have $A_u(x\psi) \in \operatorname{Ran} H_u \subset L^2(\mathbb{R})$. The constant in equation (3.4.9) is zero because all the other terms are in $L^2(\mathbb{R})$. Then we have

$$(A_u - a)(x\psi) = \frac{1}{i}\psi. \tag{3.4.10}$$

Applying the self-adjoint operator $A_u - a$ to both sides of the equation (3.4.10), we obtain $(A_u - a)^2(x\psi) = 0$ and

$$\|(A_u - a)(x\psi)\|_{L^2}^2 = ((A_u - a)(x\psi), (A_u - a)(x\psi)) = ((A_u - a)^2(x\psi), x\psi) = 0.$$

Thus, $(A_u - a)(x\psi) = 0$. In conclusion, by equation (3.4.10), $\psi = 0$ and therefore all the eigenfunctions belonging to $\operatorname{Ran} H_u$, corresponding to the same eigenvalue a, are linearly dependent. $\square$

Proof of Theorem 3.1.2. Since $u \in \operatorname{Ran} H_u$, there exists a unique function $g \in \operatorname{Ran} H_u$ such that $u = H_u(g)$. By Lemma 3.4.7, it results that $H_u(u) = \lambda g$. Applying the identity (3.1.10),

$$A_uH_u + H_uA_u + \frac{\omega}{c}H_u + \frac{1}{c}H_u^3 = 0,$$

to g and using $A_u u = -\frac{\omega}{c}u$, one obtains $H_u(A_u g + \frac{\lambda}{c}g) = 0$. Since $A_u(\operatorname{Ran} H_u) \subset \operatorname{Ran} H_u$, we have $A_u g + \frac{\lambda}{c}g \in \operatorname{Ran} H_u \cap \operatorname{Ker} H_u$. Therefore, $A_u g + \frac{\lambda}{c}g = 0$, which is equivalent to

$$cDg - T_{|u|^2}g + \lambda g = 0.$$

In the following we intend to find a simpler version of the above equation, in order to determine the function g explicitly. Note that $\bar{u}(1-g) \in L^2_+$, since it is orthogonal to each complex conjugate of a holomorphic function $f \in L^2_+$:

$$(\bar{u}(1-g), \bar{f}) = (f(1-g), u) = (f, u) - (f, H_u(g)) = 0.$$

Thus, $T_{|u|^2}(g) = \Pi(|u|^2) - \Pi(|u|^2(1-g)) = H_u(u) - |u|^2(1-g) = \lambda g - |u|^2(1-g)$.

Passing into the Fourier space and using the fact that $|u|^2$ is a real valued function, one can write

$$|u|^2 = \int_0^\infty e^{ix\xi}\widehat{|u|^2}(\xi)d\xi + \int_0^\infty e^{-ix\xi}\overline{\widehat{|u|^2}}(\xi)d\xi = \Pi(|u|^2) + \overline{\Pi(|u|^2)}.$$

Therefore $|u|^2 = H_u(u) + \overline{H_u(u)} = \lambda(g+\bar{g})$. Consequently, $T_{|u|^2}(g) = \lambda(-\bar{g}+g^2+|g|^2)$ and g solves the equation

$$cDg - \lambda g^2 + \lambda(g + \bar{g} - |g|^2) = 0. \tag{3.4.11}$$

We prove that $g + \bar{g} - |g|^2 = 0$. First, note that $\bar{u}(1-g) \in L^2_+$, also yields $(1-g)f \in \operatorname{Ker} H_u$, for all $f \in L^2_+$. Secondly, let us prove that $g+\bar{g}-|g|^2$ is orthogonal to the complex conjugate of all $f \in L^2_+$:

$$(g+\bar{g}-|g|^2, \bar{f}) = (g, \bar{f}) - (f(1-g), g) = -(f(1-g), \tfrac{1}{\lambda}H_u(u)) = -\tfrac{1}{\lambda}(u, H_u(f(1-g))) = 0.$$

In addition, since $g + \bar{g} - |g|^2$ is a real valued function, we have

$$(g + \bar{g} - |g|^2, f) = (g + \bar{g} - |g|^2, \bar{f}) = 0$$

for all $f \in L^2_+$. Therefore, $g + \bar{g} - |g|^2$ is orthogonal to all the functions in $L^2(\mathbb{R})$ and thus $g + \bar{g} - |g|^2 = 0$. This is equivalent to $|1 - g| = 1$ on $\mathbb{R}$. Moreover, equation (3.4.11) gives the precise formula for g,

$$g(z) = \frac{r}{z-p},$$

where $r, p \in \mathbb{C}$ and $\operatorname{Im}(p) < 0$. Thus $1 - g(x) = \frac{x-\bar{p}}{x-p}$ for all $x \in \mathbb{R}$ and

$$\operatorname{Ker} H_{\frac{1}{z-p}} = \frac{z-\bar{p}}{z-p}L^2_+ = (1-g)L^2_+ \subset \operatorname{Ker} H_u.$$

Consequently, $u \in \operatorname{Ran} H_u \subset \operatorname{Ran} H_{\frac{1}{z-p}} = \frac{\mathbb{C}}{z-p}$. □

3.5 Orbital stability of traveling waves

In order to prove the orbital stability of traveling waves, we first use the fact that they are minimizers of the Gagliardo-Nirenberg inequality. We begin this section by proving this inequality, more precisely proposition 3.1.5.

Proof of Proposition 3.1.5, Gagliardo-Nirenberg inequality. The proof is similar to the proof of Gagliardo-Nirenberg inequality for the circle, in [34]. The idea is to write all the norms in the Fourier space, using Plancherel's identity.

$$E = \|u\|_{L^4}^4 = \|u^2\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{u^2}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi.$$

Using the fact that $u \in L^2_+$ and Cauchy-Schwarz inequality, we have :

$$\begin{aligned}|\widehat{u^2}(\xi)|^2 &= \frac{1}{4\pi^2}\Big|\int_0^\xi \widehat{u}(\eta)\widehat{u}(\xi-\eta)d\eta\Big|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\xi\int_0^\xi |\widehat{u}(\eta)|^2|\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2}\Big(\int_0^\xi \eta|\widehat{u}(\eta)|^2|\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta + \int_0^\xi (\xi-\eta)|\widehat{u}(\eta)|^2|\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta\Big).\end{aligned}$$

By change of variables $\xi-\eta \mapsto \eta$ in the second integral, we have

$$|\widehat{u^2}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\xi \eta|\widehat{u}(\eta)|^2|\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta.$$

By Fubini's theorem and change of variables $\zeta = \xi-\eta$ it results that

$$E \leq \frac{1}{4\pi^3}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\xi \eta|\widehat{u}(\eta)|^2|\widehat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta d\xi = \frac{1}{4\pi^3}\int_0^{+\infty}\eta|\widehat{u}(\eta)|^2 d\eta\int_0^{+\infty}|\widehat{u}(\zeta)|^2 d\zeta = \frac{1}{\pi}MQ.$$

Moreover, equality holds if and only if we have equality in Cauchy-Schwarz inequality, i.e.

$$\widehat{u}(\xi)\widehat{u}(\eta) = \widehat{u}(\xi+\eta)\widehat{u}(0),$$

for all $\xi,\eta \geq 0$. This is true if and only if $\widehat{u}(\xi) = e^{-ip\xi}\widehat{u}(0)$, for all $\xi \geq 0$. Since $u \in H^{1/2}_+$, this yields $\operatorname{Im}(p) < 0$ and $u(x) = \frac{C}{x-p}$, for some constant C. □

The second argument we use in proving stability of traveling waves is a profile decomposition theorem. It states that bounded sequences in $H^{1/2}_+$ can be written as superposition of translations of fixed profiles and of a remainder term. The remainder is small in all the L^p-norms, $2 < p < \infty$. Moreover, the superposition is almost orthogonal in the $H^{1/2}_+$-norm.

Proposition 3.5.1 (The profile decomposition theorem for bounded sequences in $H^{1/2}_+$)**.** *Let $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a bounded sequence in $H^{1/2}_+$. Then, there exist a subsequence of $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, still denoted by $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a sequence of fixed profiles in $H^{1/2}_+$, $\{V^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$, and a family of real sequences $\{x^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ such that for all $\ell \in \mathbb{N}^*$ we have*

$$v^n = \sum_{j=1}^{\ell} V^{(j)}(x - x_n^{(j)}) + r_n^{(\ell)},$$

where

$$\lim_{\ell\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|r_n^{(\ell)}\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$$

for all $p\in(2,\infty)$*, and*

$$\|v^n\|_{L^2}^2=\sum_{j=1}^{\ell}\|V^{(j)}\|_{L^2}^2+\|r_n^{(\ell)}\|_{L^2}^2+o(1),\quad \textit{as } n\to\infty,$$

$$\|v^n\|_{\dot H_+^{1/2}}^2=\sum_{j=1}^{\ell}\|V^{(j)}\|_{\dot H_+^{1/2}}^2+\|r_n^{(\ell)}\|_{\dot H_+^{1/2}}^2+o(1),\quad \textit{as } n\to\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|v^n\|_{L^4}^4=\sum_{j=1}^{\infty}\|V^{(j)}\|_{L^4}^4.$$

The proof of this proposition follows exactly the same lines as that of the profile decomposition theorem for bounded sequences in $H^1(\mathbb{R})$, [54, Proposition 2.1]. However, note that in our case, the profiles $V^{(j)}$ belong to the space $H_+^{1/2}$, (not only to the space $H^{1/2}(\mathbb{R})$), as they are weak limits of translations of the sequence $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proof of Corollary 3.1.3. According to Proposition 3.1.5, $C(a,r)$ is the set of minimizers of the problem

$$\inf\{M(u)\big|u\in H_+^{1/2},Q(u)=q(a,r),E(u)=e(a,r)\},$$

where

$$q(a,r)=\frac{a^2\pi}{r},\qquad e(a,r)=\frac{a^4\pi}{2r^3}.$$

We denote the infimum by $m(a,r)$.

Since

$$\inf_{\phi\in C(a,r)}\|u_0^n-\phi\|_{H_+^{1/2}}\to 0,$$

by the Sobolev embedding theorem, we deduce

$$Q(u_0^n)\to q(a,r),\qquad E(u_0^n)\to e(a,r),\qquad M(u_0^n)\to m(a,r).$$

Let $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be an arbitrary sequence of real numbers. The conservation laws yield

$$Q(u^n(t_n))\to q(a,r),\quad E(u^n(t_n))\to e(a,r),\quad M(u^n(t_n))\to m(a,r).$$

We can choose two sequences of positive numbers $\{a_n\}$ and $\{\lambda_n\}$ such that $v^n(x):=a_nu^n(t_n,\lambda_nx)$ satisfies $\|v^n\|_{L^2(\mathbb{R})}=1$, $\|v^n\|_{L^4(\mathbb{R})}=1$. Notice that

$$a_n\to a_\infty,\quad \lambda_n\to\lambda_\infty,$$

where $a_\infty > 0$, $\lambda_\infty > 0$, and

$$\frac{\lambda_\infty}{a_\infty^4} = e(a,r), \quad \frac{\lambda_\infty}{a_\infty^2} = q(a,r).$$

Then

$$\|v^n\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^{1/2} = \frac{\|v^n\|_{L^2}^{1/2}\|v^n\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^{1/2}}{\|v^n\|_{L^4}} = \frac{\|u^n(t_n)\|_{L^2}^{1/2}\|u^n(t_n)\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^{1/2}}{\|u^n(t_n)\|_{L^4}},$$

for all $n \in \mathbb{N}$. In particular, as a consequence of the Gagliardo-Nirenberg inequality,

$$\lim_{n\to\infty} \|v^n\|_{\dot{H}^{1/2}_+} = \sqrt{\pi}.$$

Thus, the sequence $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is bounded in $H^{1/2}_+$. Applying the profile decomposition theorem (Proposition 3.5.1), we obtain that there exist real sequences $\{x^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ depending on the sequence $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in the definition of $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, such that for all $\ell \in \mathbb{N}^*$ we have :

$$v^n = \sum_{j=1}^{\ell} V^{(j)}(x - x_n^{(j)}) + r_n^{(\ell)},$$

where

$$\lim_{\ell\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|r_n^{(\ell)}\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

for all $p \in (2, \infty)$, and

$$\|v^n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \|V^{(j)}\|_{L^2}^2 + \|r_n^{(\ell)}\|_{L^2}^2 + o(1), \quad \text{as } n \to \infty,$$

$$\|v^n\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \|V^{(j)}\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^2 + \|r_n^{(\ell)}\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^2 + o(1), \quad \text{as } n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|v^n\|_{L^4}^4 = \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{L^4}^4.$$

Consequently,

$$1 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{L^2}^2, \qquad \pi \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^2, \qquad 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{L^4}^4. \tag{3.5.1}$$

Therefore, by the Gagliardo-Nirenberg inequality (3.1.12), we have

$$\pi \geq (\sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{L^2}^2)(\sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^2) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{L^2}^2 \|V^{(j)}\|_{\dot{H}^{1/2}_+}^2 \geq \pi \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{(j)}\|_{L^4}^4 = \pi.$$

Thus, there exist only one profile $V := V^{(1)}$ and a sequence $x = x^{(1)}$ such that

$$\begin{aligned} v^n =& V(x - x_n) + r_n, \\ \|v^n\|_{L^2}^2 =& \|V\|_{L^2}^2 + \|r_n\|_{L^2}^2 + o(1), \quad \text{as } n \to \infty, & (3.5.2) \\ \|v^n\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 =& \|V\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 + \|r_n\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 + o(1), \quad \text{as } n \to \infty. & (3.5.3) \end{aligned}$$

According to (3.5.1), V satisfies $1 \geq \|V\|_{L^2}^2$, $\pi \geq \|V\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2$, and $\|V\|_{L^4}^4 = 1$. In conclusion,

$$\pi = \pi\|V\|_{L^4}^4 \leq \|V\|_{L^2}^2 \|V\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 \leq \pi.$$

Hence, V is a minimizer in the Gagliardo-Nirenberg inequality. Moreover,

$$\|V\|_{L^2}^2 = 1 = \|v^n\|_{L^2}, \qquad \|V\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 = \pi = \lim_{n\to\infty} \|v^n\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2,$$

By (3.5.2) and (3.5.3), we have $r_n \to 0$ in $H_+^{1/2}$ as $n \to \infty$. Consequently, $v^n(\cdot + x_n) \to V$ in $H_+^{1/2}$, or equivalently,

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n u^n(t_n, \lambda_n x) - V(x - x_n)\|_{H_+^{1/2}} = 0.$$

We then have

$$\lim_{n\to\infty} \|u^n(t_n, x) - \frac{1}{a_\infty} V(\frac{x - x_n\lambda_\infty}{\lambda_\infty})\|_{H_+^{1/2}} = 0.$$

Notice that, since V is a minimizer in the Gagliardo-Nirenberg inequality, we have $\tilde{\phi}(x) := \frac{1}{a_\infty} V(\frac{x}{\lambda_\infty}) = \frac{\alpha}{x-p} \in C(a, r)$. Then, since $x_n\lambda_\infty \in \mathbb{R}$, we have $\phi(x) = \tilde{\phi}(x - x_n\lambda_\infty) = \frac{\alpha}{x-\tilde{p}} \in C(a, r)$. Thus,

$$\inf_{\phi\in C(a,r)} \|u^n(t_n, x) - \phi(x)\|_{H_+^{1/2}} \to 0, \text{ as } n \to \infty. \tag{3.5.4}$$

The conclusion follows by approximating the supremum in the statement by the sequence in (3.5.4) with an appropriate $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Chapitre 4

Explicit formula for the solution of the Szegö equation on the real line and applications

Ce chapitre est la reprise d'un article accepté dans le journal "Discrete and Continuous Dynamical Systems A".

4.1 Introduction

One of the most important properties in the study of the nonlinear Schrödinger equations (NLS) is *dispersion*. It is often exhibited in the form of the Strichartz estimates of the corresponding linear flow. In case of the cubic NLS :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times M, \tag{4.1.1}$$

Gérard and Grellier [34] remarked that there is a lack of dispersion when M is a sub-Riemannian manifold (for example, the Heisenberg group). In this situation, many of the classical arguments used in the study of NLS no longer hold. As a consequence, even the problem of global well-posedness of (4.1.1) on a sub-Riemannian manifold still remains open. In [35, 34], Gérard and Grellier introduced a model of a non-dispersive Hamiltonian equation called *the cubic Szëgo equation.* (See (4.1.2) below.) The study of this equation is expected to give new tools to be used in understanding existence and other properties of smooth solutions of NLS in the absence of dispersion.

In this paper we will consider the Szegö equation on the real line. The space of solutions in this case is the Hardy space $L^2_+(\mathbb{R})$ on the upper half-plane

$\mathbb{C}_+ = \{z; \mathrm{Im} z > 0\}$, defined by

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \Big\{ f \text{ holomorphic on } \mathbb{C}_+; \|g\|_{L^2_+(\mathbb{R})} := \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

In view of the Paley-Wiener theorem, we identify this space of holomorphic functions on $\mathbb{C}_+$ with the space of their boundary values :

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \operatorname{supp} \hat{f} \subset [0, \infty)\}.$$

The corresponding Sobolev spaces $H^s_+(\mathbb{R})$, $s \geq 0$ are defined by :

$$H^s_+(\mathbb{R}) = \Big\{ h \in L^2_+(\mathbb{R}); \|h\|_{H^s_+} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (1 + |\xi|^2)^s |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

Similarly, we define the homogeneous Sobolev norm for $h \in \dot{H}^s_+$ by

$$||h||_{\dot{H}^s_+} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\xi|^{2s} |\hat{h}(\xi)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Endowing $L^2(\mathbb{R})$ with the usual scalar product $(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u\bar{v}$, we define the Szegö projector $\Pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ to be the projector onto the non-negative frequencies,

$$\Pi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

For $u \in L^2_+(\mathbb{R})$, we consider *the Szëgo equation on the real line* :

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{4.1.2}$$

Endowing L^2_+ with the symplectic structure $\omega(u, v) = 4\mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}} u\bar{v}$, we have that the Szegö equation is a Hamiltonian evolution associated to the Hamiltonian

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx$$

defined on $L^4_+(\mathbb{R})$. From this structure, we obtain the formal conservation law of the energy $E(u(t)) = E(u(0))$. The invariance under translations and under modulations provides two more conservation laws, the mass $Q(u(t)) = Q(u(0))$ and the momentum $M(u(t)) = M(u(0))$, where

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx \quad \text{and} \quad M(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{u} D u \, dx, \quad \text{with } D = -i\partial_x.$$

Noting that $Q(u) + M(u) = \|u\|^2_{H^{1/2}_+}$, we have $\|u(t)\|_{H^{1/2}_+} = \|u(0)\|_{H^{1/2}_+}$. Hence, $H^{1/2}_+$ is the natural space for studying the well-posedness of the equation. In [75, Theorem 1.1], it was shown that the Szegö equation on the real line is globally well-posed in $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$ and satisfies the persistence of regularity, i.e. if $u_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$ for some $s > \frac{1}{2}$, then $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{R}))$.

First of all we recall some notions and properties concerning the Szegö equation. We refer the readers to [75] for more details. The main property of the Szegö equation is that it is completely integrable in the sense that it possesses a Lax pair structure [75, Proposition 1.4]. We first define two important classes of operators on L^2_+, *the Hankel and Toeplitz operators.* The Lax pair is given in terms of these operators in Proposition 4.1.1.

A Hankel operator $H_u : L^2_+ \to L^2_+$ of symbol $u \in H^{1/2}_+$ is defined by

$$H_u(h) = \Pi(u\bar{h}).$$

Then, as it was shown in Lemma 3.5 in [75], H_u is Hilbert-Schmidt and $\mathbb{C}$-antilinear. Moreover, it satisfies the following identity :

$$(H_u(h_1), h_2) = (H_u(h_2), h_1). \tag{4.1.3}$$

As a consequence, H_u^2 is a self-adjoint linear operator. A Toeplitz operator $T_b : L^2_+ \to L^2_+$ of symbol $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ is defined by

$$T_b(h) = \Pi(bh).$$

Then, T_b is $\mathbb{C}$-linear and bounded. Moreover, T_b is self-adjoint if and only if b is real-valued.

Proposition 4.1.1 (Proposition 1.5 in [75]). *Let $u \in C(\mathbb{R}; H^s_+)$ for some $s > \frac{1}{2}$. The cubic Szegö equation* (4.1.2) *is equivalent to the following evolution equation :*

$$\frac{d}{dt} H_u = [B_u, H_u],$$

where

$$B_u = \frac{i}{2} H_u^2 - iT_{|u|^2}. \tag{4.1.4}$$

In other words, the pair (H_u, B_u) is a Lax pair for the cubic Szegö equation on the real line.

According to the classical theory developed by Lax [58], a direct consequence of the above proposition is the following corollary :

Corollary 4.1.2. *Let $U(t)$ be an operator on $H_+^{1/2}$ defined by :*

$$\frac{d}{dt}U(t) = B_{u(t)}U(t), \qquad U(0) = I. \tag{4.1.5}$$

Then, $U(t)$ is a unitary operator and if u is a solution of the Szegö equation (4.1.2) *with initial condition u_0, we have :*

$$H_{u(t)} = U(t)H_{u_0}U(t)^*. \tag{4.1.6}$$

This yields

$$U(t)\big(\mathrm{Ker}(H_{u_0})\big) \subset \mathrm{Ker}(H_{u(t)}), \qquad U(t)\big(\mathrm{Ran}(H_{u_0})\big) \subset \mathrm{Ran}(H_{u(t)}). \tag{4.1.7}$$

Another consequence of the Lax pair structure is the existence of an infinite sequence of conservation laws. More precisely, the following corollary holds.

Corollary 4.1.3. *Define $J_n(u) := (u, H_u^{n-2}u)$ for all $n \geq 2$. Then $J_{2k}(u)$, $k \in \mathbb{N}^*$, are conserved quantities for the Szegö equation. In particular, $J_2(u) = Q(u)$, $J_4(u) = \frac{E(u)}{2}$, and we recover the conservation laws of the mass and energy.*

Remark 4.1.4. Using the Mikhlin multiplier theorem, we can prove that $J_{2k}(u) \leq \|u\|_{L^{2k}}^{2k}$. Then, by the Sobolev embedding we have that $J_{2k}(u) \leq \|u\|_{H_+^{1/2}}^{2k}$. This shows that the strongest conservation law for the Szegö equation is the $H_+^{1/2}$-norm.

4.1.1 Main results

It turns out that rational functions play an important role in studying the Hankel operators, and thus the Szegö equation. In the following, we first consider solutions for the Szegö equation with rational function initial data $u_0 \in \mathcal{M}(N)$, where $\mathcal{M}(N)$ is defined below.

Definition 18. *Let $N \in \mathbb{N}^*$. We denote by $\mathcal{M}(N)$ the set of rational functions of the form*

$$\frac{A(z)}{B(z)},$$

where $A \in \mathbb{C}_{N-1}[z]$, $B \in \mathbb{C}_N[z]$, $0 \leq \deg(A) \leq N-1$, $\deg(B) = N$, $B(0) = 1$, $B(z) \neq 0$, for all $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, and A and B have no common factors.

Note that $\mathcal{M}(N)$ is a $4N$-dimensional real manifold, $\mathcal{M}(N) \subset H_+^s(\mathbb{R})$ for all $s \geq 0$, and that $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{M}(N)$ is dense in L_+^2 [69, Lemma 6.2.1]. Moreover, they remain invariant under the flow.

Proposition 4.1.5. *The manifolds $\mathcal{M}(N)$ are invariant under the flow of the Szegö equation.*

In order to prove this statement, we recall a Kronecker-type theorem.

Proposition 4.1.6 (Theorem 2.1 in [75]). *Let $u \in H^{\frac{1}{2}}_{+}$. Then $u \in \mathcal{M}(N)$ if and only if* $\mathrm{rk}(H_u) = N$. *Moreover, if $u = \frac{A}{B} \in \mathcal{M}(N)$, where A and B are relatively prime, $B(0) = 1$, $B(x) = (x-p_1)^{m_1} \dots (x-p_k)^{m_k}$, $m_1 + \dots m_k = N$, and* $\mathrm{Im}(p_j) < 0$ *for all $j = 1, 2, \dots, k$ then, we have that*

$$\mathrm{Ran}(H_u) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{ \frac{1}{(x-p_j)^{l_j}}, j = 1, 2, \dots, k \text{ and } l_j = 1, 2, \dots, m_j \right\}. \tag{4.1.8}$$

Proof of Proposition 4.1.5. By equation (4.1.6) and Proposition 4.1.6, we have that if $u_0 \in \mathcal{M}(N)$, then $\mathrm{rk}(H_{u(t)}) = \mathrm{rk}(H_{u_0}) = N$. Thus the corresponding solution $u(t) \in \mathcal{M}(N)$ for all $t \in \mathbb{R}$. □

As a corollary of the Kronecker-type theorem [75, Remark 2.2], we also have that if $u \in \mathcal{M}(N)$ then $u \in \mathrm{Ran}(H_u)$, i.e. there exists a unique element $g \in \mathrm{Ran}(H_u)$ such that

$$u = H_u(g). \tag{4.1.9}$$

This yields $\Pi(u(1-\bar{g})) = 0$, which gives :

$$\bar{u}(1-g) \in L^2_+. \tag{4.1.10}$$

An important property of Hankel operators, that will be a key point in this paper, is their characterization using the shift operators $\tilde{T}_\lambda : L^2_+ \to L^2_+$, $\lambda > 0$,

$$\tilde{T}_\lambda f(x) = e^{i\lambda x} f(x).$$

More precisely, the bounded operator $H : L^2_+ \to L^2_+$ is a Hankel operator if and only if

$$\tilde{T}^*_\lambda H = H \tilde{T}_\lambda \tag{4.1.11}$$

for all $\lambda > 0$, [69, p. 273]. The adjoint $\tilde{T}^*_\lambda : L^2_+ \to L^2_+$, defined by

$$\tilde{T}^*_\lambda f(x) = e^{-i\lambda x}(f * \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[\lambda,\infty)}))(x),$$

is very inconvenient to use. Then, for rational functions u, we define the infinitesimal shift operator $T : \mathrm{Ran}(H_u) \to \mathrm{Ran}(H_u)$,

$$Tf(x) = xf(x) - \big(\lim_{x\to\infty} xf(x)\big)(1-g(x)) \tag{4.1.12}$$

and prove that

$$T^* H_u = H_u T. \tag{4.1.13}$$

In the general case, when u is not a rational function, u does not always belong to $\mathrm{Ran}(H_u)$. Thus, g satisfying (4.1.9) does not always exist. If such g does not exist, the above definition (4.1.12) of T does not make sense. We then propose, in Section 3, to extend a definition for T^* (see (4.3.3) below) and pursue our work using T^* rather than T.

Next, we recall the definition and the characterization of soliton solutions for the Szegö equation. See [75] for details.

Definition 19. A *soliton* for the Szegö equation on the real line is a solution u with the property that there exist $c, \omega \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ such that

$$u(t,x) = e^{-it\omega} u_0(x - ct).$$

In [75, Theorem 2] it was proved that all the solitons for the Szegö equation on $\mathbb{R}$ are of the form

$$u(t,x) = e^{-i\omega t} \phi_{C,p}(x - ct), \tag{4.1.14}$$

where $\phi_{C,p} = \frac{C}{x-p}$, $\omega = \frac{|C|^2}{4(\mathrm{Im}p)^2}$, $c = \frac{|C|^2}{-2\mathrm{Im}p}$, $C, p \in \mathbb{C}$, and $\mathrm{Im}p < 0$. Hence, a soliton of the Szegö equation on $\mathbb{R}$ is a simple fraction $u(t,x) = \frac{Ce^{-i\omega t}}{x-ct-p} \in \mathcal{M}(1)$, where $\mathrm{Im}(p) < 0$.

We are now ready to state the main results of this paper. In the first place we find an explicit formula for the solutions of the Szegö equation with rational function data.

Theorem 4.1.7 (Explicit formula in the case of rational function data)**.** *Suppose that $u_0 \in \mathcal{M}(N)$ and $H_{u_0}^2$ has positive eigenvalues $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_N^2$. We will assume that $\lambda_j > 0$ for all $j = 1, 2, \dots, N$. Choose a complex orthonormal basis $\{e_j\}_{j=1}^N$ of $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$, consisting of eigenvectors of $H_{u_0}^2$ such that $H_{u_0} e_j = \lambda_j e_j$ for all $j = 1, 2, \dots, N$. Let $W(t) = e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}$ and $\beta_j = (g_0, e_j)$.*

We define an operator $S(t)$ on $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ in the following way. Fix $j \in \{1, \dots, N\}$, and let λ_j^2 be an eigenvalue of multiplicity m_j. Moreover, let $M_j \subset \mathbb{N}$ be the set of all indices k such that $H_{u_0} e_k = \lambda_j e_k$. Then, $S(t)$ in the basis $\{e_j\}_{j=1}^N$ is defined by the matrix

$$S(t)_{k,j} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{2\pi i(\lambda_k^2 - \lambda_j^2)} \left(\lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2 - \lambda_j^2)} \overline{\beta}_j \beta_k - \lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2 - \lambda_k^2)} \beta_j \overline{\beta}_k \right), & \text{if } k \in \{1, \dots, N\} \setminus M_j, \\ \frac{\lambda_j^2}{2\pi} \overline{\beta}_j \beta_k t + (Te_j, e_k), & \text{if } k \in M_j. \end{cases} \tag{4.1.15}$$

Then, we have the following explicit formula for the solution of the Szegö equation :

$$u(t,x) = \frac{i}{2\pi}\Big(u_0, W(t)(S - xI)^{-1}W(t)g_0\Big), \text{ for all } \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

We extend the explicit formula to more general initial data, that are not necessarily rational functions, in the following corollary.

Corollary 4.1.8 (A first generalization of the explicit formula)**.** *Let $u_0 \in H^{1/2}_+$ be a general initial condition. Denote by $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^{\infty}$ the positive eigenvalues of the operator $H^2_{u_0}$. We assume that $\lambda_j > 0$ for all $j \in \mathbb{N}$. Choose a complex orthonormal basis $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ of* $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ *consisting of eigenvectors of $H^2_{u_0}$ such that $H_{u_0}e_j = \lambda_j e_j$ for all $j \in \mathbb{N}^*$. Denote $W(t) = e^{i\frac{t}{2}H^2_{u_0}}$ and $\beta_j = \frac{1}{\lambda_j}(e_j, u_0)$.*

We define an operator $S(t)$ on $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ *in the following way. Fix $j \in \mathbb{N}^*$, and let λ_j^2 be an eigenvalue of multiplicity m_j. Moreover, let $M_j \subset \mathbb{N}^*$ be the set of all indices k such that $H_{u_0}e_k = \lambda_j e_k$. Then, $S(t)$ is defined by*

$$\big(S(t)e_j, e_k\big) = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{2\pi i(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\Big(\lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\overline{\beta}_j\beta_k - \lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_k^2)}\beta_j\overline{\beta}_k\Big), & \text{if } k \in \mathbb{N}\setminus M_j, \\ \frac{\lambda_j^2}{2\pi}\overline{\beta}_j\beta_k t + (Te_j, e_k), & \text{if } k \in M_j. \end{cases}$$

Denote by $\bar{S}$ the closure of the operator S.

If the sequence $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ is in ℓ^2, then there exists $g_0 \in$ $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ *such that $u_0 = H_{u_0}(g_0)$. Moreover, for* $\mathrm{Im}z > 0$*, the following formula for the solution of the Szegö equation with initial condition u_0 holds :*

$$u(t,z) = \frac{i}{2\pi}\Big(u_0, W(t)(\bar{S} - \bar{z}I)^{-1}W(t)g_0\Big).$$

The condition $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ characterizes all initial data satisfying $u_0 \in \mathrm{Ran}H_{u_0}$. In particular, by (4.1.9), it is satisfied by all rational functions. However, simple non-rational functions, like $\frac{e^{i\alpha x}}{x+i}$ with $\alpha > 0$, do not satisfy it, and hence Corollary 4.1.8 is not applicable. In the following theorem, we extend the explicit formula to even more general initial data.

Theorem 4.1.9 (Explicit formula for general data)**.** *Let $u_0 \in H^s_+$, $s > \frac{1}{2}$, $xu_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. With the notations in Corollary 4.1.8, we define an operator $S^*(t)$ on* $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ *in the following way. Fix $j \in \mathbb{N}^*$. If λ_j^2 is an eigenvalue of multiplicity m_j and $M_j \subset \mathbb{N}$ is the set of all indices k such that $H_{u_0}e_k = \lambda_j e_k$, then*

$$(S^*(t)e_j, e_k) = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{2\pi i(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\Big(\lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\overline{\beta}_j\beta_k - \lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_k^2)}\beta_j\overline{\beta}_k\Big), & \text{if } k \in \mathbb{N}\setminus M_j, \\ \frac{\lambda_k^2\overline{\beta}_j\beta_k}{2\pi}t + (T^*e_j, e_k), & \text{if } k \in M_j. \end{cases}$$

Let A be the closure of S^*. Then, for $\mathrm{Im} z > 0$, *the solution of the Szegö equation writes*

$$u(t,z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{i}{2\pi}\Big(W^*(t)(A - zI)^{-1}W^*(t)u_0, \frac{1}{1-i\varepsilon z}\Big).$$

Let S^*_λ be the semi-group of contractions whose infinitesimal generator is $-iA$. Then, the above formula is equivalent to

$$\widehat{u}(t,\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\Big(W^*(t)S^*_\lambda(t)W^*(t)u_0, \frac{1}{1-i\varepsilon x}\Big), \qquad a.e.\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definition 20. A function $u_0 \in \mathcal{M}(N)$ is called *generic* if the operator $H^2_{u_0}$ has simple eigenvalues $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots < \lambda_N^2$ and $|(u_0, e_j)| \neq 0$, for all $j = 1, 2, \ldots, N$. We denote by $\mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$ the set of generic rational functions in $\mathcal{M}(N)$.

A function u_0 is called *strongly generic* if it is generic and, in addition, $|(u_0, e_j)| \neq |(u_0, e_k)|$ for all $k \neq j$. We denote by $\mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$ the set of strongly generic rational functions in $\mathcal{M}(N)$.

The sets $\mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$ and $\mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$ are indeed generic, in the sense that they are open, dense subsets of $\mathcal{M}(N)$. As in [35, Theorem 7.1], we have that $\det\big(J_{2(m+n)}\big)_{1\le m,n\le N} \neq 0$ if and only if $H_u^{2k}(g)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, are linearly independent. Decomposing $g, H^2 g, \ldots, H^{2(N-1)}g$ in the basis $\{e_j\}_{j=1}^N$, we obtain that the determinant of the matrix which contains these vectors as columns is :

$$\begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1^2\nu_1 & \ldots & \lambda_1^{2(N-1)}\nu_1 \\ \nu_2 & \lambda_2^2\nu_2 & \ldots & \lambda_2^{2(N-1)}\nu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_N & \lambda_N^2\nu_N & \ldots & \lambda_N^{2(N-1)}\nu_N \end{vmatrix} = \nu_1\ldots\nu_N \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{2(N-1)} \\ 1 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N^2 & \ldots & \lambda_N^{2(N-1)} \end{vmatrix},$$

where $\nu_j := \frac{1}{\lambda_j}|(u, e_j)|$. Thus, the fact that $g, H^2 g, \ldots, H^{2(N-1)}g$ are linearly independent is equivalent to $(u, e_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$ and λ_j are all distinct. Therefore,

$$\mathcal{M}(N)_{\text{gen}} = \big\{u_0 \in \mathcal{M}(N) \big| \det\big(J_{2(m+n)}\big)_{1\le m,n\le N} \neq 0\big\}$$

is an open, dense subset of $\mathcal{M}(N)$. By Theorem 4.1.14 below, we obtain that $\chi : \mathcal{M}(N)_{\text{gen}} \to \Omega$ (see (4.1.16) blow) is a diffeomorphism. Since $\mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$ corresponds, through χ, to an open dense subset of Ω, it results that $\mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$ is also generic.

Definition 21. We say that *soliton resolution* holds in H^s for a solution $u(t)$ of the Szegö equation, if $u(t)$ can be written as the sum of a finite number of solitons and a remainder $\varepsilon(t,x)$ with the property that $\lim_{t\to\pm\infty} \|\varepsilon(t,x)\|_{H^s} = 0$.

Using the above explicit formula for the solution, we prove the following result :

Theorem 4.1.10 (Soliton resolution for strongly generic data). *Let $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$ be a strongly generic initial data for the Szegö equation. Then, the corresponding solution satisfies the property of soliton resolution in H^s for all $s \geq 0$. More precisely, with the notations in Theorem 4.1.7, we have*

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{N} e^{-it\lambda_j^2}\phi_{C_j,p_j}(x - \tfrac{\lambda_j^2\nu_j^2}{2\pi}t) + \varepsilon(t,x),$$

where $C_j = \frac{i\lambda_j\bar{\beta}_j^2}{2\pi}$, $p_j = \mathrm{Re}(c_j(0)) - i\frac{\nu_j^2}{4\pi}$, and $\lim_{t\to\pm\infty}\|\varepsilon(t,x)\|_{H^s_+} = 0$ for all $s \geq 0$.

Studying the case of non-generic initial data $u_0 \in \mathcal{M}(2)$, such that $H_{u_0}^2$ has a double eigenvalue $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$, we can prove that the soliton resolution holds in H^s only for $0 \leq s < 1/2$. It turns out that the H^s-norms with $s > 1/2$ of such non-generic solutions grow to ∞ as $t \to \pm\infty$.

Theorem 4.1.11 (Partial soliton resolution for non-generic data). *Let $u_0 \in \mathcal{M}(2)$ be such that $H_{u_0}^2$ has a double eigenvalue $\lambda^2 > 0$. Then the corresponding solution satisfies the property of soliton resolution in H^s for $0 \leq s < 1/2$. More precisely,*

$$u(t,x) = e^{-it\lambda^2}\phi_{C,p}\big(x - \tfrac{\|u_0\|_{L^2}^2}{2\pi}t\big) + \varepsilon(t,x),$$

where the first term is a soliton with $|C| = \frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{\sqrt{\pi}\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}}$, $\mathrm{Im}(p) = -\Big(\frac{\|u_0\|_{L^2}}{\|u_0\|_{\dot{H}^1}}\Big)^2$, and $\varepsilon(t,x) \to 0$ in the all the H^s-norms with $0 \leq s < 1/2$.

However, $\varepsilon(t,x)$ stays away from zero and is bounded in the L^∞-norm and $H^{1/2}$-norm. Moreover, $\lim_{t\to\pm\infty}\|\varepsilon(t,x)\|_{H^s} = \infty$ if $s > 1/2$.

As a consequence, we obtain the following result :

Corollary 4.1.12 (Growth of high Sobolev norms). *The Szegö equation admits solutions $u(t)$ whose high Sobolev norms H^s, for $s > 1/2$, grow to infinity :*

$$\|u(t)\|_{H^s} \to \infty \text{ as } t \to \pm\infty.$$

More precisely, there exists a solution u of the Szegö equation and a constant $C > 0$ such that $\|u(t)\|_{H^s} \geq C|t|^{2s-1}$ for sufficiently large $|t|$.

Remark 4.1.13. Corollary 4.1.12 presents an example of solutions whose high Sobolev norms grow to infinity. We could observe this phenomenon by considering non-generic initial data u_0 such that the operator $H_{u_0}^2$ has a double eigenvalue. We believe that the non-dispersive character of the Szegö equation plays an important role in the occurrence of this phenomenon. For example, consider the dispersionless NLS, $iu_t = |u|^2 u$. Then, $u(t,x) = \phi(x)\exp(-i|\phi(x)|^2 t)$ with smooth ϕ is a solution, satisfying $\|u(t)\|_{H^s} \sim |t|^s$ for $s \in \mathbb{N}$. However, the situation is more subtle for the Szegö equation, due to the conservation of the $H^{1/2}$-norm. In particular, this explains why, for the Szegö equation, only the H^s-norms with $s > 1/2$ grow to infinity.

Corollary 4.1.12 shows that the energy is supported on higher frequencies while the mass is supported on lower frequencies. This phenomenon is called "forward cascade" and is consistent with some predictions in the weak turbulence theory.

Previously, Bourgain constructed, in [9, 10, 11], solutions with Sobolev norms growing to infinity. He considered, however, Hamiltonian PDEs involving a spectrally defined Laplacian. For general (dispersive) Hamiltonian PDEs, such a phenomenon is not known, but there are several partial results in this direction. In [35, Corollary 5], Gérard and Grellier noticed the growth of Sobolev norms for the Szegö equation on $\mathbb{T}$. However, their construction of a sequence of solutions $u^\varepsilon(t^\varepsilon)$ whose Sobolev norms become larger depends on the small parameter ε. In [22], Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, and Tao constructed solutions for the defocusing cubic NLS on $\mathbb{T}^2$ whose high Sobolev norms become greater than any fixed constant at some time. Kuksin considered in [56] the case of small dispersion NLS, $-i\partial_t u + \delta\Delta u = |u|^2 u$, [1] with odd periodic boundary condition, where δ is a small parameter. He proved that Sobolev norms of solutions with relatively generic data of unit mass, grow larger than a negative power of δ. However, these constructions do not give an example of solution such that $\sup_t \|u(t)\|_{H^s} = \infty$.

In the following theorem we introduce generalized action-angle coordinates for the Szegö equation in the case of generic rational functions.

Theorem 4.1.14 (Generalized action-angle coordinates)**.** *For $u \in \mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$ denote by $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \dots \lambda_N^2$ the simple positive eigenvalues of H_u^2 and by $\{e_j\}_{j=1}^N$ an orthonormal basis of $\operatorname{Ran}(H_u)$ such that $H_u e_j = \lambda_j e_j$. Denote $\nu_j = |(g, e_j)|$, $\phi_j = \arg(g, e_j)$, and $\gamma_j = \operatorname{Re}(Te_j, e_j)$.*

Set $\Omega := (\mathbb{R}_+^*)^N \times \{0 < x_1 < x_2 \dots < x_N\} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. The application $\chi : \mathcal{M}(N)_{\text{gen}} \to \Omega$ defined by

$$\chi(u) = \Big(\{2\lambda_j^2\nu_j^2\}_{j=1}^N, \{4\pi\lambda_j^2\}_{j=1}^N, \{2\phi_j\}_{j=1}^N, \{\gamma_j\}_{j=1}^N\Big), \tag{4.1.16}$$

is a symplectic diffeomorphism. Moreover, $2\lambda_j^2\nu_j^2$, $4\pi\lambda_j^2$, $2\phi_j \in \mathbb{T}$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, N$ are generalized action-angle coordinates for the Szegö equation on the real line.

As a corollary, we obtain that in the generic case, the trajectories of the Szegö equation spiral around toroidal-cylinders $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Note that this can be considered as a perturbation of the dispersionless NLS. See p.138 in [13]

Corollary 4.1.15 (Lagrangian toroidal cylinders). *Let $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$. Consider*

$$TC(u_0) := \Big\{u \in \mathcal{M}(N)_{\text{gen}} | H_u^2, H_{u_0}^2 \text{ have same eigenvalues } \lambda_j^2 \text{ and same } \nu_j\Big\}. \tag{4.1.17}$$

Then, $u(t) \in TC(u_0)$ for all $t \in \mathbb{R}$, and the set $TC(u_0)$ is diffeomorphic to a toroidal cylinder $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ parameterized by the coordinates $(2\phi_j, \gamma_j)_{j=1}^N$, where $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $2\phi_j \in \mathbb{T}$.

It seems difficult to extend Theorem 4.1.14 and Corollary 4.1.15 to arbitrary generic functions, which are not necessarily rational, as we did in Theorem 4.1.9. The main reasons are the lack of compactness and the fact that we are unable to characterize the conditions $u_0 \in H_+^s$, $s > 1/2$ and $xu_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ in terms of the spectral data.

The present paper was inspired by [36], where Gérard and Grellier introduced action-angle coordinates for the Szegö equation on $\mathbb{T}$. However, [36] does not treat the question of soliton resolution and growth of high Sobolev norms. Different difficulties are to be overcome in the two settings. In the case of $\mathbb{R}$, these difficulties are mostly related to the infinitesimal shift operator T in (4.1.12), which does not appear in the case of $\mathbb{T}$.

4.1.2 Structure of the Chapter 4

We conclude this introduction by discussing the structure of the paper with some details. In Section 2, we prove Theorem 4.1.7, i.e. find an explicit formula for the solution of the Szegö equation with rational function initial condition. In the case of other completely integrable equations like KdV and one dimensional cubic NLS, an explicit formula for solutions was determined by the inverse scattering method [2, 23, 32]. Since in our case the operator H_u is compact, we will not apply the inverse scattering method. We find a direct approach to solve the inverse spectral problem for the Hankel operator H_u, using the Lax pair structure and the commutation relation (4.1.13) between the operator H_u and the infinitesimal shift T.

The inverse spectral problem for Hankel operators was considered in several papers, among which we cite [1, 65]. Our results are more precise than the previous ones and allow us to have a formula for the symbol u of the Hankel operator H_u only in terms of the spectral data.

Let us describe our strategy in Section 2. First we notice that $\hat{u}(\lambda) = (u, e^{i\lambda x} g)$, $\lambda > 0$. Then, we introduce the operators $S_\lambda(t) = P_{u_0} U^*(t) T_\lambda(t) U(t)$, where

$S(t) = U^*(t)T(t)U(t)$ is acting on $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$. Exploiting the Lax pair structure, we obtain that

$$u(t,x) = \frac{i}{2\pi}\Big(u_0, W(t)(S-xI)^{-1}W(t)g_0\Big). \tag{4.1.18}$$

Since S is defined using $U(t)$ and since the definition of $U(t)$ (4.1.5) depends on $u(t)$ itself, the above formula is a vicious circle. To break it, we determine S without using $U(t)$. The explicit expression for S is obtained by computing the commutator $[H_{u_0}^2, S]$ and the derivative $\frac{d}{dt}S(t)$.

In Section 3, we prove Corollary 4.1.8 and Theorem 4.1.9. The proof of Theorem 4.1.9 uses an approximation argument, based on the remark that $u \in \overline{\mathrm{Ran}(H_u)}$ for all $u \in H_+^{1/2}$. The crucial step is to define the "adjoint of the infinitesimal shift operator", T^*, for functions which are not necessarily rational functions (it seems more delicate to define the operator T directly).

Notice that in Theorem 4.1.7, S is a matrix whose eigenvalues are not real and thus the inverse $(S-xI)^{-1}$ can be explicitly computed. The result obtained in Theorem 4.1.9 is weaker. The operator S^* acts between infinite dimensional spaces. Explicitly computing $(A-zI)^{-1}$ or the semi-group S_λ^* comes down to solving an infinite system of linear differential equations. Therefore, Theorem 4.1.9 actually states that we can transform our nonlinear infinite dimensional dynamical system into a linear one.

In Section 4, we prove Theorem 4.1.10. The soliton resolution conjecture is believed to be true for many dispersive equations for which the non-linearity is not strong enough to create finite-time blow-up. However, this was proved only for few equations like KdV [26] and one dimensional cubic NLS [70, 62], for which an explicit formula for the solution is available. For KdV, soliton resolution was proved in L^∞ and it was noticed that it is unlikely to hold in $H^1(\mathbb{R})$ (the remainder may carry a part of the initial energy). For NLS, soliton resolution was proved in L^2. In this case, in addition to solitons, the solution contains a radiation term, which is a solution of the linear Schrödinger equation. For both KdV and NLS, the conjecture holds only for "generic" data. In Theorem 4.1.10 we prove that for strongly generic, rational functions solutions of the Szegö equation, soliton resolution holds in all H^s, $s \geq 0$.

In Section 5, we prove Theorem 4.1.11 and Corollary 4.1.12. We show that soliton resolution still holds, even for non-generic solutions, but only in H^s, $0 \leq s < 1/2$. This is probably due to the fact that $H^{1/2}$ is the space of critical regularity.

The starting point in proving Theorems 4.1.10 and 4.1.11 is the explicit formula found in section 2, which we are able to write as a sum of simple fractions $\frac{C_j(t)}{x-\overline{E}_j(t)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. The key remark is that the complex conjugates of the poles of $u(t)$, $E_j(t)$, are the eigenvalues of the operator $T(t)$ acting on $\mathrm{Ran}(H_{u(t)})$. In the strongly generic case, the eigenvalues of $T(t)$ satisfy $E_j(t) = a_j t + b_j + O(\frac{1}{t})$ as $t \to \pm\infty$ with $a_j \neq 0$ and $\mathrm{Im}(b_j) \neq 0$. This leads to the soliton resolution $u(t,x) =$

$\sum_{j=1}^{N} \frac{C_j(t)}{x-\bar{a}_j t-\bar{b}_j} + \varepsilon(t,x)$ in H^s for all $s \geq 0$. In the non-generic case, there is j_0 such that $E_{j_0}(t) = \mathrm{Re}(b_{j_0}) + O(\frac{1}{t})$ as $t \to \pm\infty$. Then, $\mathrm{Im}(E_{j_0}) = O(\frac{1}{t})$ and thus, one of the poles of the solution approaches the real line as $|t| \to \infty$. This causes $\|u(t)\|_{H^s}$ to grow to ∞ if $s > 1/2$.

In Section 6, we prove Theorem 4.1.14 and Corollary 4.1.15. The Szegö equation is an infinite dimensional, completely integrable system. The Lax pair structure yields the existence of an infinite sequence of prime integrals $J_{2n} = (u, H_u^{2n-2}u)$, $n \in \mathbb{N}$. Since the finite dimensional manifolds $\mathcal{M}(N)$ are invariant under the flow, by restricting the Szegö equation to $\mathcal{M}(N)$, we obtain a $4N$-dimensional, completely integrable system. The common level sets of the prime integrals J_{2n} are not compact. Then, a generalization of the Liouville-Arnold theorem [28, 27] to the case of a $4N$-dimensional, completely integrable system, with non-compact level sets, states the *existence* of generalized action-angle coordinates, if certain conditions are satisfied. In these coordinates ($2N$ invariant action coordinates, k angle coordinates belonging to $\mathbb{T}$, and $2N-k$ generalized angle coordinates belonging to $\mathbb{R}$) the equation can be easily integrated. In Theorem 4.1.14, we *explicitly introduce* generalized action-angle coordinates in terms of the spectral data.

Our strategy is to use the Szegö hierarchy, i.e. the the infinite family of completely integrable systems corresponding to the Hamiltonian vector fields of J_{2n}. The difficulty consists in proving that $\gamma_j = \mathrm{Re}\,(Te_j, e_j)$ are the generalized angles.

4.2 Explicit formula for the solution in the case of rational function initial data

In this section we find the explicit formula for the solution in the case of rational functions data.

Lemma 4.2.1. *Let $u = \frac{A}{B} \in \mathcal{M}(N)$, where A and B are relatively prime, $B(0) = 1$, $B(x) = (x-p_1)^{m_1} \ldots (x-p_k)^{m_k}$, $m_1 + \ldots m_k = N$, and $\mathrm{Im}(p_j) < 0$ for all $j = 1, 2, \ldots, k$. Then $\mathrm{Ker}(H_u) = b_u L^2_+$, where*

$$b_u = \prod_{j=1}^{k} \frac{(x-\bar{p}_j)^{m_j}}{(x-p_j)^{m_j}}$$

and

$$g = 1 - b_u. \tag{4.2.1}$$

Démonstration. Let $f \in \mathrm{Ker}(H_u) = \big(\mathrm{Ran}(H_u)\big)^{\perp}$. Then by equation (4.1.8) we have

that
$$\Big(f, \frac{1}{(x-p_j)^{l_j}}\Big) = 0 \text{ for all } j = 1, 2, \dots, k \text{ and } l_j = 1, 2, \dots, m_j.$$

By the residue theorem we have that
$$\widehat{\frac{1}{(x-p_j)^{l_j}}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{(x-p_j)^{l_j}} = \frac{2\pi(-i)^{l_j}}{(l_j-1)!}\xi^{l_j-1}e^{-ip_j\xi}. \tag{4.2.2}$$
Using the Plancherel formula, we obtain that
$$0 = (\hat{f}(\xi), \xi^{l_j-1}e^{-ip_j\xi}) = \int e^{i\bar{p}_j\xi}\hat{f}(\xi)\xi^{l_j-1}d\xi$$

and thus $(D^{l_j-1}f)(\bar{p}_j) = 0$, for all $j = 1, 2, \dots, k$ and $l_j = 1, 2, \dots, m_j$. Then, the classical property [69, Corollary 3.7.4, p.38] stating that if $f \in L^2_+$ is such that $f(\bar{p}) = 0$, $\mathrm{Im}(p) < 0$, then $f(x) = \frac{x-\bar{p}}{x-p}f'(x)$ with $f' \in L^2_+$, applied recurrently to f, Df,...,$D^{m_j-1}f$ yields the formula for b_u. Using this formula we obtain
$$\Pi(u\bar{b}_u) = \Pi\Big(\frac{A}{(x-\bar{p}_1)^{m_1}\dots(x-\bar{p}_k)^{m_k}}\Big) = 0. \tag{4.2.3}$$

Moreover, equation (4.1.8) yields that $1 - b_u \in \mathrm{Ran}(H_u)$ and by (4.1.9) we have that
$$H_u(1-b_u) = \Pi(u - u\bar{b}_u) = u = H_u(g).$$

Since H_u is one to one on its range, we conclude that $1 - b_u = g$. □

Lemma 4.2.2. *If $u \in \mathcal{M}(N)$ and if g is such that $u = H_u(g)$, then*
$$\hat{u}(\lambda) = (u, e^{i\lambda x}g) \text{ for all } \lambda > 0.$$

Démonstration. Denoting by $\mathcal{F}$ the Fourier transform, we have that
$$\begin{aligned}\hat{u}(\lambda) &= \int e^{-i\lambda x}udx = \int e^{-i\lambda x}u(1-\bar{g})dx + \int e^{-i\lambda x}u\bar{g}dx\\ &= \mathcal{F}(u(1-\bar{g}))(\lambda) + (u, e^{i\lambda x}g) = \overline{\mathcal{F}(\bar{u}(1-g))}(-\lambda) + (u, e^{i\lambda x}g).\end{aligned}$$

By (4.1.10) we have that $\bar{u}(1-g) \in L^2_+$. Thus, the first term is the Fourier transform at $-\lambda < 0$ of a function in L^2_+, and hence it is zero. □

Lemma 4.2.3. *If $u(t)$ is the solution of the Szegö equation corresponding to the initial condition $u_0 \in \mathcal{M}(N)$ at time t and $g(t) \in \mathrm{Ran}(H_{u(t)})$ is such that $u(t) = H_{u(t)}(g(t))$, then we have :*
$$U^*(t)u(t) = e^{-i\frac{t}{2}H^2_{u_0}}u_0, \tag{4.2.4}$$

$$U^*(t)g(t) = e^{i\frac{t}{2}H^2_{u_0}}g_0.$$

Démonstration. Differentiating with respect to t and using equations (4.1.4), (4.1.2), and (4.1.6), we have

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U^*u =& - U^*B_u u - iU^*T_{|u|^2}u = -U^*(-iT_{|u|^2}u + \frac{i}{2}H_u^2 u) - iU^*T_{|u|^2}u \\ =& - \frac{i}{2}U^*H_u^2 u = -\frac{i}{2}H_{u_0}^2 U^*u.\end{aligned}$$

Since $U^*(0) = U(0) = I$, this yields the first equality. By equation (4.1.6) and using the fact that the operator H_u is skew-symmetric, we can rewrite (4.2.4) as

$$H_{u_0}\Big(U^*(t)g(t) - e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}g_0\Big) = 0.$$

By (4.1.7) we have that $U^*(t)g(t) - e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}g_0 \in \operatorname{Ran}(H_{u_0})$ and since H_{u_0} is one to one on $\operatorname{Ran}(H_{u_0})$, the second equality follows. □

In the following we denote the unitary operator $e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}$ by $W(t)$. The skew-symmetry of the Hankel operator H_{u_0} yields

$$H_{u_0}W = W^*H_{u_0}. \tag{4.2.5}$$

We also set

$$\tilde{e}(t) := U^*(t)g(t) = e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}g_0 = W(t)g_0. \tag{4.2.6}$$

With these notations we have, by equation (4.1.6), that

$$u(t) = H_{u(t)}(g(t)) = U(t)H_{u_0}U^*(t)g(t) = U(t)(H_{u_0}\tilde{e}(t)). \tag{4.2.7}$$

Definition 22. *Let us denote by P_u the orthogonal projection on* $\operatorname{Ran}(H_u)$. *We also denote by T_λ, $\lambda > 0$, the compressed shift operators acting on* $\operatorname{Ran}(H_u)$ *by*

$$T_\lambda f = P_u(e^{i\lambda x}f), \text{ for all } f \in \operatorname{Ran}(H_u).$$

If $u(t)$ is the solution of the Szegö equation with initial condition u_0 and $T_\lambda(t)$ acts on $\operatorname{Ran}(H_{u(t)})$*, then we define the operators $S_\lambda(t)$, $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}$ on* $\operatorname{Ran}(H_{u_0})$ *by*

$$S_\lambda(t)f = U^*(t)T_\lambda(t)U(t) = P_{u_0}U^*(t)e^{i\lambda x}U(t)f. \text{ for all } f \in \operatorname{Ran}(H_{u_0}),$$

Notice that using (4.1.7), we have

$$P_{u(t)}e^{i\lambda x}g(t) = U(t)(P_{u_0}U^*(t)e^{i\lambda x}U(t))U^*(t)g(t) = U(t)(S_\lambda(t)\tilde{e}). \tag{4.2.8}$$

Definition 23. *Let* $u = \frac{A}{B} \in \mathcal{M}(N)$*, where* A *and* B *are relatively prime,* $B(0) = 1$*,* $B(x) = (x - p_1)^{m_1} \dots (x - p_k)^{m_k}$*,* $m_1 + \dots m_k = N$*, and* $\mathrm{Im}(p_j) < 0$ *for all* $j = 1, 2, \dots, k$*. For all* $f \in \mathrm{Ran}(H_u)$*,*

$$f = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{x - p_j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l_j=2}^{m_j} \frac{\beta_j^l}{(x - p_j)^{l_j}},$$

we define

$$\Lambda(f) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \lim_{x \to \infty} x f(x).$$

The infinitesimal shift operator is the linear operator T *defined on* $\mathrm{Ran}(H_u)$ *by :*

$$T(f) = xf - \Lambda(f) b_u. \tag{4.2.9}$$

Notice that by (4.1.8)*, we have that* $T(f) \in \mathrm{Ran}(H_u)$ *for all* $f \in \mathrm{Ran}(H_u)$*.*

If $u(t)$ *is the solution of the Szegö equation with initial condition* u_0 *and* $T(t)$ *is the operator* T *acting on* $\mathrm{Ran}(H_{u(t)})$*, we introduce the family of operators* $S(t)$ *acting on* $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$*, by*

$$S(t) = U^*(t) T(t) U(t).$$

Lemma 4.2.4. *The eigenvalues of* T *and* S *are the complex conjugates of the poles of* u*. In particular, the eigenvalues of* T *and* S *have strictly positive imaginary part.*

Démonstration. Since T and S are conjugated, they have the same eigenvalues. If $Tf = \lambda f$, then we have that $(x - \lambda) f = \Lambda(f) b_u$. Taking $x = \lambda$, we obtain that $b_u(\lambda) = 0$. Then, Lemma 4.2.1 yields that $\lambda = \bar{p}_j$. □

Remark 4.2.5. Notice that we can extend the definition of Λ to

$$T_{|u|^2}\big(\mathrm{Ran}(H_u)\big) = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{l_j=1}^{2m_j} \frac{\beta_j^l}{(x - p_j)^{l_j}};\ \beta_j^l \in \mathbb{C} \Big\}.$$

We then use formula (4.2.9) to extend the definition of T to $T_{|u|^2}\big(\mathrm{Ran}(H_u)\big)$.

Lemma 4.2.6. *The operator* iS *is the infinitesimal generator of the semi-group* S_λ*, i.e.* $S_\lambda = e^{i\lambda S}$ *for all* $\lambda > 0$*.*

Démonstration. Because of the definitions of S and S_λ in terms of T and T_λ, it is enough to prove that

$$-i \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} T_\lambda f = T T_{\lambda|\lambda=0} f,$$

where T and T_λ act on $\mathrm{Ran}(H_u)$.

Define the linear operator $L : \mathrm{Hol}(\mathbb{C}_+) \to \mathbb{C}^N$ by

$$L : f \mapsto \left\{ \partial_x^m f(\bar{p}_j) \middle| j \in \{1, 2, \ldots, k\}, m \in \{0, 2, \ldots, m_j - 1\} \right\},$$

where $p_1, p_2, \ldots, p_k$ are the poles of u and m_j is the multiplicity of the pole p_j. Then, we have that $\mathrm{Ker} L = b_u \mathrm{Hol}(\mathbb{C}_+)$, where $b_u = \prod_{j=1}^k \left(\frac{x-\bar{p}_j}{x-p_j}\right)^{m_j}$. In particular, $L_{|\mathrm{Ran}(H_u)} : \mathrm{Ran}(H_u) \to L(\mathrm{Ran}(H_u))$ is a isomorphism. Since $T_\lambda f, Tf \in \mathrm{Ran}(H_u)$ for all $f \in \mathrm{Ran}(H_u)$, the lemma is proved once we show that $L(-i\frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} T_\lambda f) = L(Tf)$. This is indeed true since $L(b_u) = 0$, $L(h) = L(P_u h)$ for all $h \in L^2_+$, and

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} L(T_\lambda f) &= \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} L(P_u(e^{i\lambda x} f)) = \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} L(e^{i\lambda x} f) \\ &= iL(xf) = iL(xf - \Lambda(f) b_u) = iL(Tf).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.7. *If $u(t)$ is the solution of the Szegö equation corresponding to the initial data $u_0 \in \mathcal{M}(N)$, then the following formula holds :*

$$u(t,x) = \frac{i}{2\pi}\Big(u_0, W(t)(S - xI)^{-1} W(t) g_0\Big). \tag{4.2.10}$$

Démonstration. Using the Cauchy integral formula, Plancherel's identity, equation (4.2.2), Lemma 4.2.2, equations (4.2.7) and (4.2.8), the fact that $U(t)$ are unitary operators, equation (4.2.5), and Lemma 4.2.6, we have for $\mathrm{Im} z > 0$ that

$$\begin{aligned}
u(z,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{u(x)}{x-z}dx = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^\infty \widehat{u}(t,\lambda)\overline{\widehat{\frac{1}{x-\bar{z}}}}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}\widehat{u}(t,\lambda)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}(u(t), e^{i\lambda x}g(t))d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}(u(t), P_{u(t)}e^{i\lambda x}g(t))d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}\Big(U(t)(H_{u_0}\tilde{e}), U(t)(S_\lambda(t)\tilde{e})\Big)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}\Big(H_{u_0}\tilde{e}, S_\lambda(t)\tilde{e}\Big)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}\Big(H_{u_0}(W(t)g_0), S_\lambda(t)W(t)g_0\Big)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{iz\lambda}\Big(W(t)^* H_{u_0}g_0, S_\lambda(t)W(t)g_0\Big)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(W(t)^* u_0, \int_0^\infty e^{\lambda(iS - i\bar{z}I)}d\lambda W(t)g_0\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(u_0, W(t)(iS - i\bar{z}I)^{-1}W(t)g_0\Big).
\end{aligned}$$

The above formula also holds for $x \in \mathbb{R}$ since, by Lemma 4.2.4, the eigenvalues of S are not real numbers. □

Notice that in this formula for $u(t)$, the operator $S(t)$ is defined using $U(t)$ whose definition depends on $u(t)$. Our goal is to characterize $S(t)$ without using $U(t)$. In order to do that, we need to determine the derivative in time of $S(t)h$, for any $h \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$. This derivative is expressed in terms of commutators of T with Hankel and Toeplitz operators, that we compute in the following.

The below formula, that can be proved by passing into the Fourier space, will be useful :

$$\Pi(xf) = x\Pi(f) + \frac{1}{2\pi i}\int f, \tag{4.2.11}$$

if $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ and $xf \in L^2(\mathbb{R})$.

Lemma 4.2.8. *If $u \in \mathcal{M}(N)$ and $f \in \mathrm{Ran}(H_u)$, then*

$$\Lambda(H_u f) = -\frac{1}{2\pi i}\int u\bar{f}, \tag{4.2.12}$$

$$\Lambda(f) = -\frac{1}{2\pi i}(f, g) \text{ for all } f \in \mathrm{Ran}(H_u), \tag{4.2.13}$$

$$\Lambda(T_{|u|^2} f) = -\frac{1}{2\pi i}\int |u|^2 f. \tag{4.2.14}$$

Démonstration. The result follows once we prove that for all $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(N)$ that have the same poles, $p_1, \dots, p_k$, we have

$$\Lambda(\Pi(f_1\bar{f}_2)) = -\frac{1}{2\pi i}\int f_1\bar{f}_2. \tag{4.2.15}$$

Indeed, (4.2.12) follows taking $f_1 = u$, $f_2 = f$ and (4.2.14) follows taking $f_1 = uf$, $f_2 = u$. Then, (4.2.13) is a direct consequence of (4.2.12). In order to prove (4.2.15) we decompose $f_1\bar{f}_2$ into simple rational fractions :

$$f_1\bar{f}_2 = \frac{A_1}{x-p_1} + \dots + \frac{A_k}{x-p_k} + \frac{B_1}{x-\bar{p}_1} + \dots + \frac{B_k}{x-\bar{p}_k} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l_j=2}^{m_j}\frac{A_j^{l_j}}{(x-p_j)^{l_j}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l_j=2}^{m_j}\frac{B_j^{l_j}}{(x-\bar{p}_j)^{l_j}}.$$

Since $\mathrm{Im}(p_j) < 0$ for all $j = 1, 2, \dots, k$, the residue theorem yield :

$$\int f_1\bar{f}_2 = -2\pi i(A_1 + \dots + A_k) = -2\pi i\Lambda(\Pi(f_1\bar{f}_2)).$$

$\square$

Lemma 4.2.9. *For all $h \in \mathrm{Ran}(H_u)$ we have*

$$[T, T_{|u|^2}]h = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int |u|^2 h\Big)g + \Lambda(h)|u|^2 b_u, \tag{4.2.16}$$

$$[T, H_u^2]h = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int |u|^2 h\Big)g + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int \bar{u}h\Big)u. \tag{4.2.17}$$

Démonstration. Using equations (4.2.11), (4.2.14), and (4.2.3), we have

$$\begin{aligned}
[T, T_{|u|^2}]h =& xT_{|u|^2}h - \Lambda(T_{|u|^2}h)b_u - T_{|u|^2}(xh - \Lambda(h)b_u) \\
=& \Big(x\Pi(|u|^2 h) - \Pi(x|u|^2 h)\Big) - \Lambda(T_{|u|^2}h)b_u + \Lambda(h)\Pi(|u|^2 b_u) \\
=& -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int |u|^2 h\Big) + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int |u|^2 f\Big)b_u + \Lambda(h)|u|^2 b_u.
\end{aligned}$$

The first formula now follows using equation (4.2.1). Secondly, using equations (4.2.3), (4.2.11) twice, (4.2.12), and (4.2.1), we have

$$\begin{aligned}
[T, H_u^2]h =& xH_u^2 h - \Lambda(H_u^2 h)b_u - H_u\Big(\Pi(xu\bar{h}) - \Lambda(h)\Pi(u\bar{b}_u)\Big) \\
=& xH_u^2 h - H_u\big(\Pi(xu\bar{h})\big) - \Lambda(H_u^2 h)b_u \\
=& \Pi(xu\overline{H_u h}) - \frac{1}{2\pi i}\int u\overline{H_u h} - H_u\Big(x\Pi(u\bar{h}) + \frac{1}{2\pi i}\int u\bar{h}\Big) - \Lambda(H_u^2 h)b_u \\
=& \Pi(xu\overline{H_u h}) - \frac{1}{2\pi i}\int u\overline{H_u h} - \Pi(ux\overline{H_u h}) + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int \bar{u}h\Big)u - \Lambda(H_u^2 h)b_u \\
=& -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int u\overline{H_u h}\Big)(1 - b_u) + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int \bar{u}h\Big)u \\
=& -\frac{1}{2\pi i}(u, u\bar{h})g + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int \bar{u}h\Big)u.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.2.10. *For all $h \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$, we have*

$$P_{u_0}\frac{d}{dt}S(t)h = \frac{1}{4\pi}\Big((h, H_{u_0}^2\tilde{e})\tilde{e} + (h, H_{u_0}\tilde{e})H_{u_0}\tilde{e}\Big). \tag{4.2.18}$$

Démonstration. Using equation (4.1.5), we have that

$$P_{u_0} i\frac{d}{dt}S(t)h = P_{u_0}U^*[T, T_{|u|^2} - \frac{1}{2}H_u^2]Uh + P_{u_0}U^*(i\frac{d}{dt}T(t))Uh.$$

Then, by Lemma 4.2.9, equation (4.2.1), $b_u = 1 - g$, equations (4.2.6) and (4.2.7), we have

$$\begin{aligned}P_{u_0} i\frac{d}{dt}S(t)h =&P_{u_0}U^*\Big(-\frac{1}{2\pi i}\big(\int |u|^2Uh\big)g+\Lambda(Uh)|u|^2b_u\\&+\frac{1}{4\pi i}\big(\int |u|^2Uh\big)g-\frac{1}{4\pi i}\big(\int \bar{u}Uh\big)u\Big)+P_{u_0}U^*\big(ig'\Lambda(Uh)\big)\\=&-\frac{1}{4\pi i}\big(\int |u|^2Uh\big)\tilde{e}-\frac{1}{4\pi i}\big(\int \bar{u}Uh\big)H_{u_0}\tilde{e}\\&+\Lambda(Uh)P_{u_0}U^*(|u|^2b_u)+\Lambda(Uh)P_{u_0}U^*(ig').\end{aligned}$$

In order to compute $g'(t)$, we will differentiate the equality $u=H_ug$. We obtain :

$$-iT_{|u|^2}u=[B_u,H_u]g+H_u(g')=-iT_{|u|^2}H_ug-iH_uT_{|u|^2}g+iH_u^3g+H_u(g').$$

Then, $H_u(g'+i\Pi(|u|^2(g-1)))=0$ and thus by (4.2.3) we have $P_u(ig')=-P_u\Pi(|u|^2b_u)=-P_u(|u|^2b_u)$. Consequently, by (4.1.7) we have

$$P_{u_0}U^*(ig')=U^*P_u(ig')=-U^*P_u(|u|^2b_u)=-P_{u_0}U^*(|u|^2b_u).$$

Therefore we obtain

$$P_{u_0}\frac{d}{dt}S(t)h=\frac{1}{4\pi}\big(\int |u|^2Uh\big)\tilde{e}+\frac{1}{4\pi}\big(\int \bar{u}Uh\big)H_{u_0}\tilde{e}.$$

To conclude, we only need to rewrite the two parenthesis so that they do not depend on U. By equation (4.1.6), the definitions of g, $\tilde{e}$, and equation (4.1.3), we have :

$$\begin{aligned}\int |u|^2Uh&=(u,u\overline{Uh})=(u,\Pi(u\overline{Uh}))=(u,H_u(Uh))=(u,UH_{u_0}h)=(U^*H_ug,H_{u_0}h)\\&=(H_{u_0}U^*g,H_{u_0}h)=(H_{u_0}\tilde{e},H_{u_0}h)=(h,H_{u_0}^2\tilde{e}).\end{aligned}$$

$$\int \bar{u}Uh=(Uh,u)=(Uh,H_ug)=(h,U^*H_ug)=(h,H_{u_0}U^*g)=(h,H_{u_0}\tilde{e}). \quad (4.2.19)$$

□

In order to express S without using $U(t)$, we also need to determine the adjoint S^* of the operator S and prove the commutation relation $S^*H_{u_0}=H_{u_0}S$. We first determine T^*.

Lemma 4.2.11. *The adjoint of the operator T on* $\mathrm{Ran}(H_u)$ *is the operator T^* defined by*

$$T^*f=xf-\Lambda(f),\ \textit{for all } f\in\mathrm{Ran}(H_u).$$

Démonstration. By equations (4.2.11), (4.2.1), and (4.2.12), for all $f_1, f_2 \in L^2_+$ we have that :

$$\begin{aligned}(TH_uf_1, H_uf_2) &= (xH_uf_1 - \Lambda(H_uf_1)b_u, u\bar{f}_2) = (H_uf_1, xu\bar{f}_2) - \Lambda(H_uf_1)(b_uf_2, u)\\ &= (H_uf_1, \Pi(xu\bar{f}_2)) - \Lambda(H_uf_1)(f_2(1-g), u)\\ &= \Big(H_uf_1, x\Pi(u\bar{f}_2) + \frac{1}{2\pi i}\int u\bar{f}_2\Big) - \Lambda(H_uf_1)\Big((f_2, u) - (f_2, \bar{g}u)\Big)\\ &= (H_uf_1, xH_uf_2 - \Lambda(H_uf_2)) - \Lambda(H_uf_1)\Big((f_2, u) - (f_2, H_ug)\Big)\\ &= (H_uf_1, xH_uf_2 - \Lambda(H_uf_2)).\end{aligned}$$

Hence $T^*\big(H_uf_2\big) = xH_uf_2 - \Lambda(H_uf_2)$, for all $f_2 \in L^2_+$. □

Lemma 4.2.12.

$$S^*H_{u_0} = H_{u_0}S$$

and

$$S = S^* - \frac{1}{2\pi i}(\cdot, \tilde{e})\tilde{e}. \tag{4.2.20}$$

Démonstration. By projecting equation (4.1.11) on $\mathrm{Ran}(H_u)$, we obtain $T_\lambda^*H_u = H_uT_\lambda$. Then, by Lemma 4.2.6 it follows that $T^*H_u = H_uT$. This and equation (4.1.6) yield for all $h \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$ that

$$H_{u_0}Sh = H_{u_0}U^*TUh = U^*H_uTUh = U^*T^*H_uUh = U^*T^*UH_{u_0}h = S^*H_{u_0}h.$$

Notice that (4.2.13) yields that

$$T = T^* - \frac{1}{2\pi i}(\cdot, g)g. \tag{4.2.21}$$

Then, (4.2.20) follows immediately by conjugating the above relation with $U(t)$. □

Proof of Theorem 4.1.7. By conjugating equation (4.2.17) by $U(t)$, we obtain :

$$[H_{u_0}^2, S]h = \frac{1}{2\pi i}\Big((h, H_{u_0}^2\tilde{e})\tilde{e} - (h, H_{u_0}\tilde{e})H_{u_0}\tilde{e}\Big),$$

for all $h \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$. Applying this to $h = e_j$ we have

$$(H_{u_0}^2 - \lambda_j^2)Se_j = \frac{\lambda_j}{2\pi i}\Big(\lambda_j(e_j, \tilde{e})\tilde{e} - (\tilde{e}, e_j)H_{u_0}\tilde{e}\Big).$$

Suppose that λ_j is an eigenvalue of multiplicity m_j and that M_j is the set of all indices k such that $H_{u_0}e_k = \lambda_j e_k$. Plugging $\tilde{e} = \sum_{k=1}^N (\tilde{e}, e_k)e_k$ in the above formula we have :

$$(H_{u_0}^2 - \lambda_j^2)Se_j = \frac{\lambda_j}{2\pi i}\sum_{k\notin M_j}\Big(\lambda_j(e_j,\tilde{e})(\tilde{e},e_k) - \lambda_k(\tilde{e},e_j)(e_k,\tilde{e})\Big)e_k$$
$$+\frac{\lambda_j^2}{2\pi i}\sum_{k\in M_j}\Big((e_j,\tilde{e})(\tilde{e},e_k) - (\tilde{e},e_j)(e_k,\tilde{e})\Big)e_k.$$

Since

$$(\tilde{e}, e_j) = (e^{i\frac{t}{2}H_{u_0}^2}g_0, e_j) = e^{i\frac{t}{2}\lambda_j^2}(g_0,e_j) = e^{i\frac{t}{2}\lambda_j^2}\beta_j,$$

we obtain

$$(H_{u_0}^2 - \lambda_j^2)Se_j = \frac{\lambda_j}{2\pi i}\sum_{k\notin M_j}\Big(\lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\overline{\beta}_j\beta_k - \lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_k^2)}\beta_j\overline{\beta}_k\Big)e_k$$
$$+\frac{\lambda_j^2}{2\pi i}\sum_{k\in M_j}(\overline{\beta}_j\beta_k - \beta_j\overline{\beta}_k)e_k$$

Writing

$$S(t)e_j = \sum_{k=1}^N c_j^k(t)e_k,$$

we have

$$(H_{u_0}^2 - \lambda_j^2)S(t)e_j = \sum_{k\notin M_j}(\lambda_k^2 - \lambda_j^2)c_j^k(t)e_k.$$

Identifying the coefficients of $(H_{u_0}^2 - \lambda_j^2)S(t)e_j$ in the basis $\{e_k\}_{k=1}^N$, we obtain that

$$\overline{\beta}_j\beta_k \in \mathbb{R}, \text{ for all } k\in M_j \tag{4.2.22}$$

and

$$c_j^k(t) = \frac{\lambda_j}{2\pi i(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\Big(\lambda_j e^{i\frac{t}{2}(\lambda_k^2-\lambda_j^2)}\overline{\beta}_j\beta_k - \lambda_k e^{i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_k^2)}\beta_j\overline{\beta}_k\Big)$$

for all $k \notin M_j$. Finally, we determine $c_j^k(t)$ for $k \in M_j$ using Lemma 4.2.10 :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c_j^k(t) &= \frac{d}{dt}(S(t)e_j, e_k) = (P_{u_0}\frac{d}{dt}S(t)e_j, e_k) = \frac{\lambda_j^2}{4\pi}\Big((e_j,\tilde{e})(\tilde{e},e_k) + (\tilde{e},e_j)(e_k,\tilde{e})\Big)\\ &= \frac{\lambda_j^2}{4\pi}(\overline{\beta}_j\beta_k + \beta_j\overline{\beta}_k) = \frac{\lambda_j^2}{2\pi}\overline{\beta}_j\beta_k.\end{aligned}$$

Therefore, for $k \in M_j$ we have

$$c_j^k(t) = \frac{\lambda_j^2}{2\pi}\overline{\beta}_j\beta_k t + c_j^k(0),$$

where $c_j^k(0) = (S(0)e_j, e_k) = (Te_j, e_k)$. □

4.3 Extension of the formula to general initial data

Proof of Corollary 4.1.8. The proof of Theorem 4.1.7 can be adapted to the case of a general initial data, as long as $u_0 \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$, i.e. there exists $g_0 \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$ such that $u_0 = H_{u_0}(g_0)$. Writing $g_0 = \sum_{j=1}^{\infty}(g_0, e_j)e_j$ in the basis $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, the fact that $g_0 \in L^2(\mathbb{R})$ is equivalent to $\sum_{j=1}^{\infty}|(g_0,e_j)|^2 < \infty$. Since $u_0 = H_{u_0}(g_0)$ yields $(u_0, e_j) = \lambda_j(e_j, g)$ for all $j \in \mathbb{N}^*$, it follows that $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\lambda_j}(u_0,e_j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$.

The main difference with the case of rational functions data is that S is no longer a matrix, but an operator acting between infinite dimensional spaces. Then, the infinitesimal generator of the semi-group S_λ is not iS, but its closure $i\bar{S}$ (like in Proposition 4.3.4). This explains the operator $\bar{S}$ appearing in the explicit formula. □

Proposition 4.3.1. *Let $s \geq 1$. If $u_0 \in H_+^s$ and $xu_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, then the corresponding solution of the Szegö equation satisfies $xu(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ for all $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. The local well-posedness follows using a fixed point argument in the space (L_t^∞, X), where

$$X := H_+^s(\mathbb{R}) \cap \big\{f \big| xf(x) \in L^\infty(\mathbb{R})\big\}.$$

By equation (4.2.11), the Hölder inequality, and Sobolev embedding, we have :

$$\begin{aligned}\Big\|x\int_0^T \Pi\big(|u(t)|^2u(t)\big)dt\Big\|_{L^\infty_{t,x}} &\leq T\big\|x\Pi\big(|u(t)|^2u(t)\big)\big\|_{L^\infty_{t,x}}\\ &= T\Big\|\Pi\big(x|u(t)|^2u(t)\big)-\frac{1}{2\pi i}\int|u(t)|^2u(t)dx\Big\|_{L^\infty_{t,x}}\\ &\leq T\Big\|\Pi\big(x|u(t)|^2u(t)\big)\Big\|_{L^\infty_{t,x}}+\frac{T}{2\pi}\Big\|\int|u(t)|^2u(t)dx\Big\|_{L^\infty_t}\\ &\leq T\big\|\Pi\big(x|u(t)|^2u(t)\big)\big\|_{L^\infty_tH^1_x}+\frac{T}{2\pi}\Big\|\int|u(t)|^2u(t)dx\Big\|_{L^\infty_t}\\ &\leq T\big\|x|u(t)|^2u(t)\big\|_{L^\infty_tH^1_x}+\frac{T}{2\pi}\|u\|_{L^\infty_{t,x}}\|u\|^2_{L^\infty_tL^2_x}\\ &\leq T\big(4\|xu\|_{L^\infty_{t,x}}+\|u\|_{L^\infty_tH^s_x}\big)\|u\|^2_{L^\infty_tH^s_x}+\frac{T}{2\pi}\|u\|^3_{L^\infty_tH^s_x}.\end{aligned}$$

The global well-posedness is a consequence of the Brezis-Gälouet estimate

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq C\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}\left(\log\Big(2+\frac{\|u\|_{H^s}}{\|u\|_{H^{1/2}}}\Big)\right)^{\frac{1}{2}},$$

and of Gronwall's inequality. □

Lemma 4.3.2. *For all $u\in H^{1/2}_+$, we have that $u\in\overline{\mathrm{Ran}(H_u)}$.*

Moreover, if $u\in H^s(\mathbb{R})$, $s>\frac12$ and $xu(x)\in L^\infty(\mathbb{R})$, we have that $u=\lim_{\varepsilon\to0}H_u(\frac{1}{1-i\varepsilon x})$.

Démonstration. For $h\in L^2_+$, we have that

$$(u,h)=\lim_{\varepsilon\to0}\Big(u,\frac{h}{1-i\varepsilon x}\Big)=\lim_{\varepsilon\to0}\Big(u\bar h,\frac{1}{1-i\varepsilon x}\Big)=\lim_{\varepsilon\to0}\Big(H_uh,\frac{1}{1-i\varepsilon x}\Big).\qquad(4.3.1)$$

Taking $h\in\mathrm{Ker}(H_u)$, it follows that $(u,h)=0$ and $u\in(\mathrm{Ker}(H_u))^\perp=\overline{\mathrm{Ran}(H_u)}$.

By (4.1.3), the above equation also yields that for all $h\in L^2_+$, we have that

$$(u,h)=\lim_{\varepsilon\to0}\Big(H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big),h\Big).$$

Then, $H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)$ converges weakly to u in L^2_+. We now intend to prove that, if $u\in H^s(\mathbb{R})$ and $xu(x)\in L^\infty(\mathbb{R})$, then $\big\|H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)\big\|_{L^2}\to\|u\|_{L^2}$. This yields that the convergence is strong in L^2_+.

Computing the Fourier transform with the residue theorem, we have that

$$H_u\Big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\Big) = \Pi\Big(\frac{u(x)}{1+i\varepsilon x}\Big) = \frac{1}{i\varepsilon}\Pi\Big(\frac{u(x)}{x-\frac{i}{\varepsilon}}\Big) = \frac{1}{i\varepsilon}\cdot\frac{u(x)-u(\frac{i}{\varepsilon})}{x-\frac{i}{\varepsilon}} \qquad (4.3.2)$$
$$= \frac{u(x)-u(\frac{i}{\varepsilon})}{1+i\varepsilon x}.$$

By the Sobolev embedding $H^s(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ for $s > \frac{1}{2}$, we have that there exists $C_0 > 0$ such that $|u(x)| \leq C_0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Since u is a holomorphic function in $\mathbb{C}_+$, we can write using the Poisson integral

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}z \frac{u(x)}{|z-x|^2}dx,$$

for all $z \in \mathbb{C}_+$. Then

$$|u(z)| \leq \frac{C_0}{\pi}\mathrm{Im}z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-x|^2}dx = C_0,$$

for all $z \in \mathbb{C}_+$. Thus, u is bounded in $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$. Similarly, since $xu(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, we have that $zu(z)$ is bounded in $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ by a constant C_1. In particular, we have that $\frac{i}{\varepsilon}u(\frac{i}{\varepsilon}) \leq C_1$ and thus $\lim_{\varepsilon\to 0} u(\frac{i}{\varepsilon}) = 0$. Then, by (4.3.2), we have that $H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)$ converges pointwise to $u(x)$. Furthermore,

$$\Big|H_u\Big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\Big)\Big|^2 = \Big|\frac{u(x)-u(\frac{i}{\varepsilon})}{1+i\varepsilon x}\Big|^2 \leq |u(x)-u(\frac{i}{\varepsilon})|^2 \leq 2(|u(x)|^2 + |u(\frac{i}{\varepsilon})|^2) \leq 4C_0$$

and

$$\Big|H_u\Big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\Big)\Big|^2 \leq \frac{2(|u(x)|^2+|u(\frac{i}{\varepsilon})|^2)}{1+\varepsilon^2x^2} \leq \frac{\frac{C_1}{x^2}+C_1\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2x^2} = \frac{C_1}{x^2}.$$

Then, the functions $\Big|H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)\Big|^2$ are bounded by an integrable function. By the dominated convergence theorem, it follows that $\big\|H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)\big\|_{L^2} \to \|u\|_{L^2}$. Hence, $H_u\big(\frac{1}{1-i\varepsilon x}\big) \to u$ in L^2_+. □

The key point in extending the explicit formula for the solution to the case of general initial data is the below definition of the operator $T^* : \mathrm{Ran}(H_u) \to L^2_+$,

$$T^*(H_uf) = xH_u(f) + \frac{1}{2\pi i}(u,f). \qquad (4.3.3)$$

If $xu \in L^\infty(\mathbb{R})$, by (4.2.11) we have that

$$T^*(H_uf) = \Pi(xu\bar{f}).$$

Remark 4.3.3. *If $u \in H^s_+$ for $s > \frac{1}{2}$ and $xu \in L^\infty(\mathbb{R})$, then the operator T^* takes values in $\overline{\mathrm{Ran}(H_u)}$.*

Démonstration. For all $f \in \mathrm{Ran}(H_u)$ and $h \in \mathrm{Ker}(H_u)$, we have that

$$\begin{aligned}(T^* f, h) = (\Pi(xu\bar{f}), h) = (xu\bar{f}, h) &= \lim_{\varepsilon \to 0}(xu\bar{f}, \frac{h}{1 - i\varepsilon x}) = \lim_{\varepsilon \to 0}(u\bar{h}, x\frac{f}{1 - i\varepsilon x}) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0}(H_u h, x\frac{f}{1 - i\varepsilon x}) = 0.\end{aligned}$$

Then, $T^* f \in (\mathrm{Ker}(H_u))^\perp = \overline{\mathrm{Ran}(H_u)}$. □

For $\lambda > 0$, we introduce the operators $T^*_\lambda : L^2_+ \to L^2_+$ by

$$T^*_\lambda h(x) = P_u e^{-i\lambda x}\mathcal{F}^{-1}(\hat{h}(\xi)\chi_{[\lambda, +\infty)}(\xi)) = P_u\Big(e^{-i\lambda x}h(x) - \frac{e^{-i\lambda x}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h(x-y)\frac{e^{i\lambda y} - 1}{iy}dy\Big).$$

Then

$$\lim_{\lambda \to 0}\frac{T^*_\lambda h(x) - h(x)}{\lambda} = P_u\Big(-ixh(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h(x)dx\Big).$$

Let us now conjugate T^* and T^*_λ using the operators $U(t)$. We obtain $S^*(t)$ and $S^*_\lambda(t)$:

$$S^*(t) = U^*(t)T^*U(t), \qquad S^*_\lambda(t) = U^*(t)T^*_\lambda U(t).$$

Proposition 4.3.4. *The closure of the operator $-iS^*$ is the infinitesimal generator of the semi-group S^*_λ. Moreover, $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ is a core for the infinitesimal generator of the semi-group S^*_λ.*

Démonstration. If $h = H_u f \in \mathrm{Ran}(H_u)$, then we have

$$\lim_{\lambda \to 0}\frac{T^*_\lambda h(x) - h(x)}{\lambda} = -iP_u\Big(xh(x) + \frac{1}{2\pi i}(u, f)\Big) = -iT^* h.$$

Conjugating with $U(t)$, we obtain that the restriction of the infinitesimal generator of S^*_λ to $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ is $-iS^*$.

Moreover, by conjugating $T^*_\lambda H_u = H_u T_\lambda$ with $U(t)$, we obtain $S^*_\lambda H_u = H_u S_\lambda$. This yields

$$S^*_\lambda(\mathrm{Ran}(H_{u_0})) \subset \mathrm{Ran}(H_{u_0}).$$

By Theorem X.49, vol. II in [81], we have that $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ is a core of the infinitesimal generator of S^*_λ. Then, the infinitesimal generator of S^*_λ is the closure $-iA$ of $-iS^*$. □

Proof of Theorem 4.1.9. According to Proposition 4.3.1, we have that $u(t) \in H^s$ and $xu(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ for all $t \in \mathbb{R}$. Then, by Lemma 4.3.2, we obtain that

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{u(t)}(\frac{1}{1 - i\varepsilon x}) \text{ in } L^2_+.$$

By Plancherel's identity, this is equivalent to

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}\Big(u(t)\big(1 - \frac{1}{1 + i\varepsilon x}\big)\Big) = 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}_+).$$

Since,

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t,\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} u(t)\big(1 - \frac{1}{1+i\varepsilon x}\big)dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} u(t)\frac{1}{1+i\varepsilon x}dx \\ &= \mathcal{F}\Big(u(t)\big(1 - \frac{1}{1+i\varepsilon x}\big)\Big)(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} u(t)\frac{1}{1 - i\varepsilon x}dx. \end{aligned}$$

we obtain that

$$\widehat{u}(t,\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(u(t), e^{i\lambda x}\frac{1}{1 - i\varepsilon x}\Big)dx.$$

The rest of the proof follows the same lines as the proof of Theorem 4.1.7, but uses T^* and S^* instead of T and S. Special attention should be given to the fact that the infinitesimal generator of the semi-group S^*_λ is not $-iS^*$, but its closure $-iA$. □

4.4 Soliton resolution of strongly generic, rational function solutions

We prove that all the solutions with strongly generic, rational function initial data $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$ resolve into N solitons and a remainder which tends to zero in all the H^s-norms for $s \geq 0$, when $t \to \pm\infty$.

Proof of Theorem 4.1.10. The strategy is to write all the vectors in $\text{Ran}(H_{u_0})$ in the basis $\{e_j\}_{j=1}^N$ and make formula (4.2.10) more explicit.

According to Theorem 4.1.7, we have

$$S(t)e_j = \Big(\frac{\lambda_j^2\nu_j^2}{2\pi}t + (S(0)e_j, e_j)\Big)e_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{N} a_{ji}(t)e_i.$$

Since $a_{ji}(t)$ are linear combinations of $e^{\pm i\frac{t}{2}(\lambda_j^2-\lambda_i^2)}$ with constant coefficients, there exists $M>0$ such that

$$|a_{ji}(t)| \leq M,$$

for all $j\neq i$ and all $t\in\mathbb{R}$. Denoting $A_j=\frac{\lambda_j^2\nu_j^2}{2\pi}t+(S(0)e_j,e_j)$, the operator S in the basis $\{e_j\}_{j=1}^N$ can be written as the following matrix :

$$S=\begin{pmatrix} A_1 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & A_2 & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & A_N \end{pmatrix}$$

Let us first compute $\mathrm{Im}(A_j)=\mathrm{Im}\big(S(0)e_j,e_j\big)$ for t large enough. By equation (4.2.20) and noting that $\tilde{e}(0)=g_0$, we have that

$$\begin{aligned} 2i\mathrm{Im}\big(S(0)e_j,e_j\big) &= \big(S(0)e_j,e_j\big)-\big(e_j,S(0)e_j\big)=\big((S(0)-S(0)^*)e_j,e_j\big) \\ &= \big(\frac{-1}{2\pi i}(e_j,g_0)g_0,e_j\big)=\frac{i}{2\pi}|(g_0,e_j)|^2. \end{aligned}$$

Therefore

$$\mathrm{Im}\big(S(0)e_j,e_j\big)=\frac{\nu_j^2}{4\pi}. \tag{4.4.1}$$

Then, we notice that

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|x-at+ib|^2|x-ct+id|^2}=O(\frac{1}{t^2}) \text{ as } t\to\pm\infty, \tag{4.4.2}$$

if $0<a<c$ and $b,d\neq 0$. This can be proved by estimating the integral on each of the intervals $(-\infty,at-1],[at-1,at+1],[at+1,ct-1],[ct-1,ct+1],[ct+1,\infty)$ if $t>0$ large enough, and similarly for $t<0$. Since $\mathrm{Im}(A_j)=\frac{\nu_j^2}{4\pi}>0$ and by the strong genericity hypothesis $\frac{\lambda_j^2\nu_j^2}{2\pi}\neq\frac{\lambda_k^2\nu_k^2}{2\pi}$ for $j\neq k$, this yields that

$$\frac{1}{(x-A_j)(x-A_k)}=O(\frac{1}{|t|}) \text{ in } L^2(\mathbb{R}) \text{ as } t\to\pm\infty,$$

Moreover, using $\big\|\frac{1}{x-A_j}\big\|_{L^\infty}=\frac{1}{\mathrm{Im}A_j}=\frac{4\pi}{\nu_j^2}$, we have that $\frac{1}{(x-A_j)(x-A_k)}=O(\frac{1}{t})$ in $H^s(\mathbb{R})$

for all $s \geq 0$. Furthermore, we have

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{(x-A_j)(x-A_k)}\Big\|_{L^\infty} &= \Big\|\frac{1}{A_k-A_j}\Big(\frac{1}{(x-A_j)}-\frac{1}{(x-A_k)}\Big)\Big\|_{L^\infty}\\ &\leq \frac{1}{|A_k-A_j|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-A_j}\Big\|_{L^\infty}+\Big\|\frac{1}{x-A_j}\Big\|_{\infty}\Big)\\ &= \frac{1}{|A_k-A_j|}\Big(\frac{4\pi}{\nu_j^2}+\frac{4\pi}{\nu_k^2}\Big)=O(\frac{1}{t}).\end{aligned}$$

Therefore, $\frac{\det(S-xI)}{(A_1-x)...(A_N-x)}-1 \to 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ and in H^s, $s \geq 0$, as $t \to \pm\infty$, since it is equal to a linear combination of $\frac{1}{(x-A_j)(x-A_k)},...,\frac{1}{(x-A_1)...(x-A_N)}$. We notice that, using the definition of the determinant, the terms $\frac{1}{x-A_j}$ do not appear in the above linear combination.

Then,

$$\begin{aligned}(S-xI)^{-1} &= \frac{1}{\det(S-xI)}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN}\end{pmatrix}\\ &= \frac{(A_1-x)\dots(A_N-x)}{\det(S-xI)}\begin{pmatrix} \frac{C_{11}}{(A_1-x)...(A_N-x)} & \frac{C_{12}}{(A_1-x)...(A_N-x)} & \cdots & \frac{C_{1N}}{(A_1-x)...(A_N-x)}\\ \frac{C_{21}}{(A_1-x)...(A_N-x)} & \frac{C_{22}}{(A_1-x)...(A_N-x)} & \cdots & \frac{C_{2N}}{(A_1-x)...(A_N-x)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{C_{N1}}{(A_1-x)...(A_N-x)} & \frac{C_{N2}}{(A_1-x)...(A_N-x)} & \cdots & \frac{C_{NN}}{(A_1-x)...(A_N-x)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

where C_{jj} is the cofactor of $A_j - x$, equal to the sum of $(A_1 - x)\dots(A_{j-1} - x)(A_{j+1} - x)\dots(A_N - x)$ and a linear combination of terms containing at most $N-2$ factors $(A_j - x)$, and C_{ij}, $i \neq j$ is the cofactor of a_{ij}, equal to a linear combination of terms containing at most $N-2$ factors $(A_j - x)$. Then, we have

$$(S-xI)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1-x}+O(\frac{1}{t}) & O(\frac{1}{t}) & \cdots & O(\frac{1}{t})\\ O(\frac{1}{t}) & \frac{1}{A_2-x}+O(\frac{1}{t}) & \cdots & O(\frac{1}{t})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O(\frac{1}{t}) & O(\frac{1}{t}) & \cdots & \frac{1}{A_N-x}+O(\frac{1}{t})\end{pmatrix} \text{ in } H^s(\mathbb{R}).$$

Therefore,

$$\begin{aligned}W(S-xI)^{-1}Wg_0 &= W(S-xI)^{-1}(\beta_1 e^{i\frac{t}{2}\lambda_1^2},\dots,\beta_N e^{i\frac{t}{2}\lambda_N^2})^t\\ &= \Big(\frac{e^{it\lambda_1^2}\beta_1}{x-A_1}+O(\frac{1}{t}),\dots,\frac{e^{it\lambda_N^2}\beta_N}{x-A_N}+O(\frac{1}{t})\Big)^t.\end{aligned}$$

Since $u_0 = \sum_{j=1}^N (u_0, e_j)e_j$ and by (4.1.3),

$$(u_0, e_j) = (H_{u_0} g_0, e_j) = (H_{u_0} e_j, g_0) = \lambda_j \overline{(g_0, e_j)} = \lambda_j \overline{\beta_j}, \tag{4.4.3}$$

we have

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\big(u_0, W(S - xI)^{-1} W g_0\big) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-it\lambda_1^2}\lambda_1 \overline{\beta}_1^2}{x - \bar{A}_1} + \cdots + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-it\lambda_N^2}\lambda_N \overline{\beta}_N^2}{x - \bar{A}_N} + O(\frac{1}{t})$$

in H^s, $s \geq 0$. Since $\operatorname{Im}(\bar{A}_j) = -\frac{\nu_j^2}{4\pi} < 0$, we have that $u \in H^s_+$. Moreover, by (4.1.14), we have that each of the functions $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-it\lambda_j^2}\lambda_1 \overline{\beta}_j^2}{x - \bar{A}_j}$ is a soliton of speed $c = \frac{\lambda_j^2 \nu_j^2}{2\pi}$ and frequency $\omega = \lambda_j^2$. □

Let us notice that the result in Theorem 4.1.10 can also be restated in terms of N-solitons.

Definition 24. *A N-soliton is a solution of the Szegö equation $u(t)$, such that there exist N solitons $\frac{C_1(t)}{x - q_1(t)}, \dots, \frac{C_N(t)}{x - q_N(t)}$ satisfying*

$$\left\| u(t) - \sum_{j=1}^N \frac{C_j(t)}{x - q_j(t)} \right\|_{H_+^{1/2}} \to 0 \text{ as } t \to -\infty.$$

If, moreover, there exist $\delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, N$ such that

$$\left\| u(t) - \sum_{j=1}^N \frac{C_j(t)}{x - \delta_j - q_j(t)} \right\|_{H_+^{1/2}} \to 0 \text{ as } t \to +\infty,$$

we say that the N-soliton is pure or that the collision of the N solitons $\frac{C_j(t)}{x - p_j(t)}$ is elastic, in the sense that there is no loss of energy in the collision.

Theorem 4.1.10 states for $s = 1/2$ that if $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\text{sgen}}$, then the corresponding solution is a pure N-soliton. Moreover, there is no shift in the trajectories of the N solitons, i.e. $\delta_j = 0$ for all $j = 1, 2, \dots, N$. This situation is characteristic to completely integrable equations. For the one dimensional cubic NLS, KdV and mKdV, which are all completely integrable, it is known that N-solitons exist and are pure [92, 46]. For the gKdV equation with fourth order nonlinearity, which is not completely integrable, it was proved in [64] that the collision of solitons fails to be elastic by loss of a small quantity of energy.

4.5 Growth of high Sobolev norms of non-generic, rational function solutions

We show that when $u_0 \in \mathcal{M}(2)$ is such that $H^2_{u_0}$ has a double eigenvalue, then the solution u behaves as the sum of a soliton and a remainder, which tends to zero in the H^s-norms, $0 \leq s < 1/2$. However, $\|u(t)\|_{H^s} \to \infty$ if $s > 1/2$. An example of such an initial condition is $u_0 = \frac{2}{x+i} - \frac{4}{x+2i}$. The operator $H^2_{u_0}$ has the double eigenvalue $(\frac{1}{3})^2$ in this case.

Let us consider an orthonormal basis $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ of $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ such that $H_{u_0}\tilde{e}_j = \lambda \tilde{e}_j$. Denoting $\tilde{\beta}_j = (g_0, \tilde{e}_j)$ and $\tilde{\nu}_j = |\tilde{\beta}_j|$ we have $g_0 = \tilde{\beta}_1\tilde{e}_1 + \tilde{\beta}_2\tilde{e}_2$ and $\|g_0\|^2_{L^2} = \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2$. By (4.2.22), we have that $\overline{\tilde{\beta}}_1\tilde{\beta}_2 \in \mathbb{R}$. We assume that $\overline{\tilde{\beta}}_1\tilde{\beta}_2 = \overline{\tilde{\nu}}_1\tilde{\nu}_2$, and thus $\tilde{\beta}_j = e^{i\theta}\tilde{\nu}_j$ for $j = 1, 2$.

We make the following change of basis

$$\begin{aligned} e_1 :=& \frac{1}{\|g_0\|_{L^2}}(\tilde{\nu}_1\tilde{e}_1 + \tilde{\nu}_2\tilde{e}_2), \\ e_2 :=& \frac{1}{\|g_0\|_{L^2}}(\tilde{\nu}_2\tilde{e}_1 - \tilde{\nu}_1\tilde{e}_2). \end{aligned}$$

Notice that this is also an orthonormal basis of $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ and $H_{u_0}e_j = \lambda e_j$. Moreover, setting $\beta_j := (g_0, e_j)$ and $\nu_j = |\beta_j|$, we have

$$\beta_2 := (g_0, e_2) = 0, \tag{4.5.1}$$

and $\nu_2 := |\beta_2| = 0$. In the case when $\overline{\tilde{\beta}}_1\tilde{\beta}_2 = -\overline{\tilde{\nu}}_1\tilde{\nu}_2$, we can similarly choose an orthonormal basis for which $\beta_2 = \nu_2 = 0$.

Lemma 4.5.1. *With the notations in Theorem 4.1.11 we set $c_j(0) = (S(0)e_1, e_j)$, $d_j(0) = (S(0)e_2, e_j)$ for $j = 1, 2$ and*

$$\begin{aligned} A :=& \frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}, \\ B :=& \frac{\lambda^2\nu_1^2}{\pi}(c_1(0) - d_2(0)), \\ C :=& (c_1(0) - d_2(0))^2 + 4c_2(0)d_1(0). \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Then, $4A^2C - B^2 > 0$ and $\mathrm{Im}(B) = \frac{\lambda^2\nu_1^4}{4\pi^2} > 0$.

Démonstration. By equation (4.4.1) we have that $\mathrm{Im}\, c_1(0) = \frac{\nu_1^2}{4\pi}$ and $\mathrm{Im}\, d_2(0) = \frac{\nu_2^2}{4\pi} = 0$. Then, we obtain

$$\mathrm{Im}(B) = \frac{\lambda^2\nu_1^2}{\pi}\mathrm{Im}c_1(0) = \frac{\lambda^2\nu_1^4}{4\pi^2}. \tag{4.5.3}$$

Let us notice that

$$\beta_j = 2\pi i \overline{\Lambda(e_j)}. \tag{4.5.4}$$

Indeed, since $e_j \in \mathrm{Ran}(H_{u_0})$, there exists $f_j \in L^2_+$ such that $e_j = H_{u_0}(f_j)$ and by equation (4.2.12) we have

$$\Lambda(e_j) = \Lambda(H_{u_0}(f_j)) = -\frac{1}{2\pi i}(u_0, f_j) = -\frac{1}{2\pi i}(H_{u_0}g_0, f_j) = -\frac{1}{2\pi i}(H_{u_0}f_j, g_0) = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\beta}_j.$$

Then,

$$\begin{aligned}4A^2C - B^2 =& 4\Big(\frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}\Big)^2\Big((c_1(0)-d_2(0))^2 + 4c_2(0)d_1(0)\Big) - 4\Big(\frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}\Big)^2(c_1(0)-d_2(0))^2\\ =& 16\Big(\frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}\Big)^2 c_2(0)d_1(0).\end{aligned}$$

By equation (4.2.20) and noticing that $\tilde{e}(0) = g_0$, we have

$$\begin{aligned}d_1(0) &= (S(0)e_2, e_1) = (S^*(0)e_2, e_1) - \frac{1}{2\pi i}(e_2, g_0)(g_0, e_1) = (S^*(0)e_2, e_1)\\ &= (e_2, S(0)e_1) = \overline{c_2(0)}.\end{aligned}$$

Thus,

$$4A^2C - B^2 = 16\Big(\frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}\Big)^2 |d_2(0)|^2.$$

Suppose by absurd that $d_2(0) = (S(0)e_2, e_1) = 0$. Since $(e_2, e_1) = 0$, and since $e_1, e_2, S(0)e_2$ belong to the two dimensional complex vector space $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$, it results that there exists $a \in \mathbb{C}$ such that $S(0)e_2 = ae_2$. Using the fact that $S(0) = T$ and the definition of T, we obtain that $e_2(x-a) = \Lambda(e_2)b_{u_0}$. Then, by equation (4.5.1) and (4.5.4), we obtain that $\Lambda(e_2) = 0$ and therefore $e_2 = 0$, which is a contradiction. Hence, $4A^2C - B^2 > 0$. □

Proof of Theorem 4.1.11. Let us first express S in the basis $\{e_1, e_2\}$ of $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$. By Theorem 4.1.7 we have

$$S(t)e_1 = c_1(t)e_1 + c_2(t)e_2,$$

with $c_1(t) = \frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}t + c_1(0)$ and $c_2(t) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\overline{\beta}_1\beta_2 t + c_2(0) = c_2(0)$, and

$$S(t)e_2 = d_1(t)e_1 + d_2(t)e_2,$$

with $d_1(t) = \frac{\lambda^2}{2\pi}\overline{\beta}_1\beta_2 t + d_1(0) = d_1(0)$ and $d_2(t) = \frac{\lambda^2\nu_2^2}{2\pi}t + d_2(0) = d_2(0)$. We denoted $c_j(0) = \big(S(0)e_1, e_j\big)$ and $d_j(0) = \big(S(0)e_2, e_j\big)$, $j = 1, 2$. Moreover, by equation (4.2.22), we have that $\overline{\beta}_1\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Therefore, in the basis $\{e_1, e_2\}$, the operator S is the matrix

$$S = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

and its characteristic equation is $x^2 - (c_1 + d_2) + c_1 d_2 - d_1 c_2 = 0$. Since $(\bar{\beta}_1\beta_2)^2 = \nu_1^2\nu_2^2$, we obtain that the discriminant of this equation writes

$$\begin{aligned}\Delta =&(c_1 - d_2)^2 + 4d_1c_2 = \Big(\frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}t + c_1(0) - d_2(0)\Big)^2 + 4c_2(0)d_1(0) \qquad (4.5.5)\\ =&\Big(\frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}\Big)^2 t^2 + \frac{\lambda^2\nu_1^2}{\pi}(c_1(0) - d_2(0))t + \big(c_1(0) - d_2(0)\big)^2 + 4c_2(0)d_1(0)\\ =&A^2t^2 + Bt + C,\end{aligned}$$

where A, B, C are defined in (4.5.2). The eigenvalues of S will be written in terms of $\sqrt{\Delta}$, where we use the principal determination of the square root. In order to do so, we have to make sure that Δ is not negative. We will show that when $|t|$ is large enough, Δ cannot be a real number. In what follows we suppose that $t > 0$. The case $t < 0$ can be treated similarly.

Using equations (4.4.1) and $(\overline{\beta}_1\beta_2)^2 = \nu_1^2\nu_2^2$, we obtain

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\Delta) =& \frac{\lambda^2\nu_1^2}{\pi}\big(\mathrm{Im}(c_1(0)) - \mathrm{Im}(d_2(0))\big)t + \mathrm{Im}\Big(\big(c_1(0) - d_2(0)\big)^2 + 4c_2(0)d_1(0)\Big)\\ =& \frac{\lambda^2\nu_1^4}{4\pi^2}t + \mathrm{Im}\Big(\big(c_1(0) - d_2(0)\big)^2 + 4c_2(0)d_1(0)\Big)\end{aligned}$$

and thus $\mathrm{Im}(\Delta) \neq 0$ for $|t|$ large enough. Using the Taylor approximation $(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$ if $|x| < 1$, we have by (4.5.5) that

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta} =&At\Big(1 + \frac{B}{A^2t} + \frac{C}{A^2t^2}\Big)^{1/2}\\ =&At\Big(1 + \frac{B}{2A^2t} + \frac{C}{2A^2t^2} - \frac{1}{8}\big(\frac{B}{A^2t} + \frac{C}{A^2t^2}\big)^2 + \frac{1}{16}\big(\frac{B}{A^2t} + \frac{C}{A^2t^2}\big)^3\\ &\quad + \big(\frac{B}{A^2t} + \frac{C}{A^2t^2}\big)^3\varepsilon\big(\frac{B}{A^2t} + \frac{C}{A^2t^2}\big)\Big)\\ =&At\Big(1 + \frac{B}{2A^2t} + \frac{1}{t^2}\Big(\frac{C}{2A^2} - \frac{B^2}{8A^4}\Big) + \frac{1}{t^3}\Big(- \frac{BC}{4A^4} + \frac{B^3}{16A^6}\Big) + O(\frac{1}{t^4})\Big)\\ =&At + \frac{B}{2A} + \frac{4A^2C - B^2}{8A^3}\cdot\frac{1}{t} + \frac{B(B^2 - 4A^2C)}{16A^6}\cdot\frac{1}{t^2} + O(\frac{1}{t^3})\end{aligned}$$

We set

$$F(t) := \frac{4A^2C - B^2}{8A^3} \cdot \frac{1}{t} + \frac{B(B^2 - 4A^2C)}{16A^6} \cdot \frac{1}{t^2} + O(\frac{1}{t^3}). \tag{4.5.6}$$

By Lemma 4.5.1, we have that

$$|F(t)| = \frac{4A^2C - B^2}{8A^3} \cdot \frac{1}{t} + O(\frac{1}{t^2}), \tag{4.5.7}$$

$$\operatorname{Im} F(t) = -\frac{\lambda^2\nu_1^4}{4\pi^2} \cdot \frac{(4A^2C - B^2)}{16A^6} \cdot \frac{1}{t^2} + O(\frac{1}{t^3}) \tag{4.5.8}$$

with $4A^2C - B^2 > 0$. Then, we have

$$\sqrt{\Delta} = At + \frac{B}{2A} + F(t) = At + c_1(0) - d_2(0) + F(t). \tag{4.5.9}$$

and the eigenvalues of S are

$$E_1 = \frac{c_1 + d_2 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}t + c_1(0) + \frac{F(t)}{2} \tag{4.5.10}$$

$$E_2 = \frac{c_1 + d_2 - \sqrt{\Delta}}{2} = d_2(0) - \frac{F(t)}{2}. \tag{4.5.11}$$

Therefore,

$$(S - xI)^{-1} = \frac{1}{\det(S - xI)}\begin{pmatrix} d_2 - x & -d_1 \\ -c_2 & c_1 - x \end{pmatrix} = \frac{1}{(x - E_1)(x - E_2)}\begin{pmatrix} d_2 - x & -d_1 \\ -c_2 & c_1 - x \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned}(S - xI)^{-1}Wg_0 &= (S - xI)^{-1}(e^{i\frac{t}{2}\lambda^2}\beta_1, 0)^t \\ &= \Big(e^{i\frac{t}{2}\lambda^2}\frac{\big(d_2(0) - x\big)\beta_1}{(x - E_1)(x - E_2)}, -e^{i\frac{t}{2}\lambda^2}\frac{c_2(0)\beta_1}{(x - E_1)(x - E_2)}e_2\Big).\end{aligned}$$

Since $u_0 = \lambda\bar{\beta}_1 e_1 + \lambda\bar{\beta}_2 e_2 = \lambda\bar{\beta}_1 e_1$, we obtain

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\big(u_0, W(S - xI)^{-1}Wg_0\big) = \frac{\lambda e^{-it\lambda^2}}{2\pi} \cdot \frac{\Big(\overline{d_2(0)} - x\Big)\overline{\beta}_1^2}{(x - \bar{E}_1)(x - \bar{E}_2)}. \tag{4.5.12}$$

Using (4.5.11), we obtain that

$$u(t) = -\frac{\frac{\lambda}{2\pi}e^{-it\lambda^2}\overline{\beta}_1^2}{x - \overline{E}_1} + \bar{F}(t)\frac{\frac{\lambda}{4\pi}e^{-it\lambda^2}\overline{\beta}_1^2}{(x - \bar{E}_1)(x - \bar{E}_2)}.$$

Let us denote

$$R(t,x) = \bar{F}(t)\frac{\frac{\lambda}{4\pi}e^{-it\lambda^2}\overline{\beta}_1^2}{(x-\bar{E}_1)(x-\bar{E}_2)}.$$

We will study the H^s-norms of R, for $s \geq 0$. First, we determine $\mathrm{Im}(E_1)$ and $\mathrm{Im}(E_2)$. By equations (4.5.11), (4.4.1), and (4.5.1), we have

$$\mathrm{Im}(E_2) = \mathrm{Im}(d_2(0)) - \frac{\mathrm{Im}F(t)}{2} = \frac{\nu_2^2}{4\pi} - \frac{\mathrm{Im}F(t)}{2} = -\frac{\mathrm{Im}F(t)}{2}.$$

and similarly, we obtain that

$$\mathrm{Im}(E_1) = \frac{\nu_1^2}{4\pi} + \frac{\mathrm{Im}F(t)}{2}.$$

Let us now estimate $\|R(t,x)\|_{H^s}$. First, we write

$$R(t,x) = \frac{\bar{F}(t)}{\bar{E}_1 - \bar{E}_2} \cdot \frac{\lambda}{4\pi}e^{-it\lambda^2}\overline{\beta}_1^2\Big(\frac{1}{x-\bar{E}_1} - \frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big). \tag{4.5.13}$$

We compute the $\dot{H}^s$-norm, $s \geq 0$, of each of the two terms in R. Let $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}p < 0$. By (4.2.2), we have that

$$\Big\|\frac{1}{x-p}\Big\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_0^\infty \xi^{2s}\Big|\mathcal{F}\Big(\frac{1}{x-p}\Big)(\xi)\Big|^2 d\xi = c\int_0^\infty \xi^{2s}|e^{-ip\xi}|^2 d\xi = c\int_0^\infty \xi^{2s}e^{2\mathrm{Im}(p)\xi}d\xi.$$

Integrating by parts, we can explicitly compute the last integral. If $p = \bar{E}_2$, then $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(\bar{E}_2)$ and we obtain

$$\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{\dot{H}^s} = O\Big(\frac{1}{|\mathrm{Im}(\bar{E}_2)|^{(2s+1)/2}}\Big) = O\Big(\frac{1}{|\mathrm{Im}F(t)|^{(2s+1)/2}}\Big).$$

More precisely, by (4.5.8) there exist $c, C > 0$ such that

$$c|t|^{2s+1} \leq \Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{\dot{H}^s} \leq C|t|^{2s+1}.$$

Similarly, for $p = \bar{E}_1$, we have $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(\bar{E}_1) = -\frac{\nu_1^2+\nu_2^2}{4\pi} - \frac{\mathrm{Im}F(t)}{2}$ and thus

$$\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{\dot{H}^s} = O(1).$$

Consequently, by (4.5.13), (4.5.10), (4.5.11), (4.5.7), (4.5.8) we obtain for $0 \leq s < \frac{1}{2}$ that

$$\begin{aligned}\|R(t,x)\|_{H^s} &\leq C\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{L^2}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{L^2}\Big)\\ &\quad + C\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{\dot{H}^s}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{\dot{H}^s}\Big)\\ &\leq \frac{C}{|t|^2}\big(|t|+|t|^{2s+1}\big).\end{aligned}$$

and thus $\|R(t,x)\|_{H^s} \to 0$ for $0 \leq s < \frac{1}{2}$. For $s > \frac{1}{2}$ we have that

$$\|R(t,x)\|_{\dot{H}^s} \geq C\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{H^s}-\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{H^s}\Big) \geq \frac{C}{|t|^2}\big(|t|^{2s+1}-|t|\big).$$

Therefore, $\|R(t,x)\|_{H^s} \to +\infty$ if $s > \frac{1}{2}$.

Moreover, for $s = 1/2$ we have

$$\begin{aligned}&c\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{L^2}-\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{L^2}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{\dot{H}^{1/2}}-\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{\dot{H}^{1/2}}\Big)\\ &\leq \|R(t,x)\|_{H^{1/2}}\\ &\leq C\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{L^2}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{L^2}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{\dot{H}^{1/2}}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{\dot{H}^{1/2}}\Big).\end{aligned}$$

and thus there exist $0 < c \leq C$ such that

$$c \leq \|R(t,x)\|_{H^{1/2}} \leq C$$

for $|t|$ large enough. We proceed similarly for $\|R(t,x)\|_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned}&c\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{L^\infty}-\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{L^\infty}\Big) \leq \|R(t,x)\|_{L^\infty}\\ &\leq C\frac{|F(t)|}{|E_1-E_2|}\Big(\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_1}\Big\|_{L^\infty}+\Big\|\frac{1}{x-\bar{E}_2}\Big\|_{L^\infty}\Big).\end{aligned}$$

Since $\big\|\frac{1}{x-\bar{E}_j}\big\|_{L^\infty} = \frac{1}{|\mathrm{Im} E_j|}$ for $j = 1, 2$, there exist $0 < c \leq C$ such that

$$c < c\frac{1}{t^2}(t^2-1) \leq \|R(t,x)\|_{L^\infty} \leq C\frac{1}{t^2}(t^2+1) < C.$$

Hence, $R(t,x)$ stays away from zero in the $H^{1/2}$-norm and L^∞-norm.

Setting

$$p(t) := \frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi}t + \mathrm{Re}(c_1(0)) - i\frac{\nu_1^2}{4\pi}$$

we have $\bar{E}_1(t) = p(t) + O(\frac{1}{t})$ as $t \to \pm\infty$ and

$$u(t,x) = -\frac{\frac{\lambda}{2\pi}\overline{\beta}_1^2 e^{-it\lambda^2}}{x - p(t)} + R(t,x) + \tilde{\varepsilon}(t,x). \tag{4.5.14}$$

where $\tilde{\varepsilon}(t,x) = -\frac{\lambda}{2\pi}\overline{\beta}_1^2 e^{-it\lambda^2}\left(\frac{1}{x-\bar{E}_1} - \frac{1}{x-p(t)}\right)$ and

$$\tilde{\varepsilon}(t,x) = C\frac{\bar{E}_1 - p(t)}{(x-\bar{E}_1)(x-p(t))} = O(\frac{1}{t}) \text{ in all } H^s, s \geq 0.$$

By (4.1.14), the first term in the sum in (4.5.14) is a soliton. Using equation (4.5.1), we have that $\|u_0\|_{L^2}^2 = (u_0, u_0) = (H_{u_0}g_0, H_{u_0}g_0) = \lambda^2\nu_1^2$. In [75, Lemma 3.5] it was shown that H_{u_0} is a Hilbert-Schmidt operator of Hilbert-Schmidt norm $\frac{\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}}{\sqrt{2\pi}}$. Then, $2\lambda^2 = \mathrm{Tr}(H_{u_0}^2) = \frac{\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2}{2\pi}$. Therefore, the soliton satisfies

$$\begin{aligned} \left|\frac{\lambda}{2\pi}\overline{\beta}_1^2 e^{-it\lambda^2}\right| &= \frac{\lambda\nu_1^2}{2\pi} = \frac{\lambda^2\nu_1^2}{2\pi\lambda} = \frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{\sqrt{\pi}\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}}, \\ \mathrm{Im}(p) &= -\frac{\nu_1^2}{4\pi} = -\frac{\lambda^2\nu_1^2}{\lambda^2} = -\frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2}. \end{aligned}$$

We set $\varepsilon(t,x) = R(t,x) + \tilde{\varepsilon}(t,x)$. Then, $\varepsilon(t,x) \to 0$ as $t \to \pm\infty$ in all the H^s-norms, $0 \leq s < 1/2$. However, $\lim_{t\to\infty}\|\varepsilon(t,x)\|_{H^s} = \infty$ if $s > 1/2$ and $t \to \pm\infty$. □

Proof of Corollary 4.1.12. Notice that the Sobolev norms of solitons are constant in time. Then, the solution in Theorem 4.1.11, having a non-generic initial data $u_0 \in \mathcal{M}(2)$ such that H_{u_0} has a double eigenvalue, provides an example of a solution whose H^s-norms, with $s > 1/2$ grow

$$\|u(t)\|_{H^s} \geq C|t|^{2s-1} \text{ if } s > 1/2$$

and $|t|$ is big enough.

This does not contradict the complete integrability of the Szegö equation, since the conservation laws $J_{2n} = (u, H_u^{2n-2}(u))$ can all be controlled by the $H_+^{1/2}$-norm, as it was noticed in Remark 4.1.4. □

4.6 Generalized action-angle coordinates

On $L^2_+(\mathbb{R})$ we introduce the symplectic form

$$\omega(u,v) = 4\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} u\bar{v}.$$

A function $F : L^2_+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ admits a Hamiltonian vector field X_F if

$$d_u F(h) = \omega(h, X_F(u)),$$

for all $u, h \in L^2_+(\mathbb{R})$. If the functions $F, G : L^2_+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ admit the Hamiltonian vector fields X_F, X_G, then we define the Poisson bracket of F and G by :

$$\{F, G\}(u) = \omega(X_F(u), X_G(u)) = d_u G(X_F(u)).$$

A consequence of the Lax pair is the existence of an infinite sequence of conservation laws as we noticed in Corollary 4.1.3.

We now introduce the Szegö hierarchy, i.e. the evolution equations associated to the Hamiltonian vector fields of J_{2n} for all $n \in \mathbb{N}^*$, and prove that each of these equations possesses a Lax pair. We will need the following lemma :

Lemma 4.6.1. *For all $f \in L^2(\mathbb{R})$ we have*

$$(I - \Pi)f = \overline{\Pi(\bar{f})}. \tag{4.6.1}$$

As a consequence, the following identity holds :

$$H_{aH_u(a)}(h) = H_u(a)H_a(h) + H_u(a\Pi(\bar{a}h)). \tag{4.6.2}$$

Démonstration. The first equation is equivalent to $f = \Pi(f) + \overline{\Pi(\bar{f})}$ and it follows by passing into the Fourier space. Then

$$\begin{aligned} H_{aH_u(a)}(h) &= \Pi(aH_u(a)\bar{h}) = \Pi\Big(H_u(a)\big(\Pi(a\bar{h}) + (I-\Pi)(a\bar{h})\big)\Big) \\ &= H_u(a)H_a(h) + \Pi(H_u(a)\overline{\Pi(\bar{a}h)}) = H_u(a)H_a(h) + \Pi(u\bar{a}\overline{\Pi(\bar{a}h)}) \\ &= H_u(a)H_a(h) + H_u(a\Pi(\bar{a}h)). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.6.2. *Let $u \in H^s_+$, $s > \frac{1}{2}$. The Hamiltonian vector field associated to $J_{2n}(u)$ is*

$$X_{J_{2n}}(u) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n-1} H_u^{2n-2k-1}(g)H_u^{2k}(g) \tag{4.6.3}$$

Moreover,

$$H_{X_{J_{2n}}}(u) = [B_{u,n}, H_u], \tag{4.6.4}$$

where

$$B_{u,n}(h) = -\frac{i}{4}\sum_{j=0}^{2n-2} H_u^j(g)\Pi(\overline{H_u^{2n-2-j}(g)}h). \tag{4.6.5}$$

Démonstration. The proof follows using the above lemma and similar computations as in the proof of Theorem 8.1 in [35]. Denote

$$\begin{aligned} w(x) &:= (1 - xH_u^2)^{-1}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n H_u^{2n} u \\ J(x,u) &:= (u, w(x,u)) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n J_{2n+2}(u). \end{aligned}$$

A computation shows that

$$\begin{aligned} &d_u J(x,u)(h) = \omega(h, X(x)), \text{ where} \\ &X(x) = \frac{1}{2i}\big(w(x) + xw(x)H_u w(x)\big). \end{aligned}$$

Identifying the coefficients of x^n, we obtain the desired formula for $X_{J_{2n}}(u)$. For the second part of the proposition, we use

$$w(x) = u + xH_u^2(w)$$

and the above lemma to obtain

$$\begin{aligned} H_{iX_{J(x,u)}}(h) &= \frac{1}{2}H_w(h) + \frac{x}{2}H_{wH_u(w)}(h) = \frac{1}{2}H_w(h) + \frac{x}{2}H_{uH_u(w)}(h) + \frac{x^2}{2}H_{H_u^2(w)H_u(w)}(h) \\ &= G_u H_u(h) + H_u D_u(h), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} G_u(h) &= \frac{x}{2} w\Pi(\bar{w}h) \\ D_u(h) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n h H_u^{2n-1}(u) + \frac{x}{2}H_h H_u(w) + \frac{x^2}{2}H_u(w)\Pi(\overline{H_u(w)}) \end{aligned}$$

Since, by (4.1.3), $H_{iX_{J(x,u)}}(h) = \frac{1}{2}H_w(h) + \frac{x}{2}H_{wH_u(w)}(h)$ satisfies

$$(H_{iX_{J(x,u)}}(h_1), h_2) = (H_{iX_{J(x,u)}}(h_2), h_1)$$

for all $h_1, h_2 \in L^2_+$, we have that

$$H_{iX_{J(x,u)}}(h) = G_u H_u(h) + H_u D_u(h) = H_u G_u(h) + D_u H_u(h) = C_u H_u + H_u C_u,$$

where $C_u = \frac{G_u + D_u}{2}$. Identifying once more the coefficients of x^n and using the fact that H_u is a skew-symmetric operator, we obtain the formula for $H_{X_{J_{2n}}}(u)$. $\square$

As in [35], the following result holds :

Theorem 4.6.3. *For every $u_0 \in H^s_+$, $s > 1$, there exists a unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+)$ of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} \partial_t u = X_{J_{2n}}(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.6.6}$$

Moreover, u satisfies

$$\partial_t H_u = [B_{u,n}, H_u] \tag{4.6.7}$$

and

$$\{J_{2n}, J_{2k}\} = 0, \tag{4.6.8}$$

for all $k \in \mathbb{N}^*$.

In what follows we compute $g'(t)$ and the commutator $[T, B_{u,n}]$ and use this result to determine the evolution of the angles and generalized angles along the flow of $X_{J_{2n}}$.

Lemma 4.6.4. *Let $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+)$, $s > 1$ be a solution of (4.6.6) and for all $t \in \mathbb{R}$ let $g(t) \in \mathrm{Ran}(H_{u(t)})$ be such that $H_{u(t)} g(t) = u(t)$. Then*

$$g'(t) = \frac{i}{4} H_u^{2n-2}(g) + P_u B_{u,n}(g). \tag{4.6.9}$$

Moreover,

$$[T, B_{u,n}]h = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{2n-2} H_u^j(g)\big(h, H_u^{2n-2-j}(g)\big) + \frac{1}{8\pi}\big(h, H_u^{2n-2}(g)\big)g - \Lambda(h) B_{u,n}(g).$$

Démonstration. In order to compute $g'(t)$, we differentiate with respect to time the equality $H_u(g) = u$:

$$[B_{u,n}, H_u]g + H_u(g') = X_{J_{2n}}(u).$$

Thus

$$\begin{aligned}H_u(g') =& X_{J_{2n}}(u) - [B_{u,n}, H_u]g \\ =& -\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{n-1} H_u^{2n-2k-1}(g)H_u^{2k}(g) + \frac{i}{4}\sum_{j=0}^{2n-2} H_u^j(g)\Pi(\overline{H_u^{2n-2-j}(g)}u) + H_uB_{u,n}(g) \\ =& -\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{n-1} H_u^{2n-2k-1}(g)H_u^{2k}(g) + \frac{i}{4}\sum_{j=0}^{n-1} H_u^{2j}(g)H_u^{2n-1-2j}(g) \\ &+ \frac{i}{4}\sum_{j=1}^{n-1} H_u^{2n-2j-1}(g)H_u^{2j}(g) + H_uB_{u,n}(g) \\ =& -\frac{i}{4}H_u^{2n-1}(g) + H_uB_{u,n}(g).\end{aligned}$$

Using the fact that H_u is a skew-symmetric operator and is onto on its range, we obtain (4.6.9).

Since the product of two rational functions has Λ equal to zero, we notice that

$$\Lambda(B_{u,n}h) = -\frac{i}{4}\sum_{j=0}^{2n-2} \Lambda\Big(H_u^j(g)\Pi\Big(\overline{H_u^{2n-2-j}(g)}h\Big)\Big) = -\frac{i}{4}\Lambda\Big(\Pi\big(\overline{H_u^{2n-2}(g)}h\big)\Big)$$

A similar computation yields the second equation in the statement. □

Proposition 4.6.5. *If $u_0 \in H^s_+$, $s > 1$ and $u_0 \in \mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$, then the solution $u(t)$ of the equation (4.6.6) is contained in the toroidal cylinder $TC(u_0)$ defined by (4.1.17), for all $t \in \mathbb{R}$. Moreover, the angles ϕ_j and the generalized angles γ_j evolve along the flow of this equation as follows :*

$$\begin{aligned}\{J_{2n}, \phi_j\} &= \frac{d}{dt}\phi_j = \frac{\lambda_j^{2n-2}}{4} \\ \{J_{2n}, \gamma_j\} &= \frac{d}{dt}\gamma_j = \frac{n-1}{4\pi}\lambda_j^{2n-2}\nu_j^2.\end{aligned}$$

Démonstration. Since the evolution equation (4.6.6) admits the Lax pair (4.6.7), the classical theory yields that if $u(t)$ is a solution of (4.6.6), then

$$H_{u(0)} = U_n(t)^* H_{u(t)} U_n(t),$$

where $U_n(t)$ is a unitary operator on L^2_+ satisfying

$$\frac{d}{dt}U_n(t) = B_{u,n}U_n, \qquad U(0) = I.$$

Therefore, the eigenvalues λ_j^2, $j = 1, 2, \dots, N$ of $H_{u(t)}^2$ are conserved in time. Moreover, if we denote by $\{e_j(0)\}_{j=0}^N$ an orthonormal basis of $\mathrm{Ran}(H_{u_0})$ such that $H_{u_0}e_j(0) = \lambda_j e_j(0)$, then $e_j(t) = U_n(t)e_j(0)$ form a basis of $\mathrm{Ran}(H_{u(t)})$ such that $H_{u(t)}e_j(t) = \lambda_j e_j(t)$. Then, by (4.6.9) and using the fact that $B_{u,n}$ is a skew-symmetric operator, we have

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(e_j(t), g(t)\big) &= \big(B_{u,n}e_j(t), g(t)\big) - \frac{i}{4}\big(e_j(t), H_u^{2n-2}(g(t))\big) + \big(e_j(t), B_{u,n}(g(t))\big)\\ &= -\frac{i}{4}\lambda_j^{2n-2}\big(e_j(t), g(t)\big).\end{aligned}$$

Therefore $\big(e_j(t), g(t)\big) = e^{-i\phi_j(t)}\big(e_j(0), g_0\big)$, with $\frac{d}{dt}\phi_j = \frac{\lambda_j^{2n-2}}{4}$. Thus $\big|\big(e_j(t), g(t)\big)\big| = \big|\big(e_j(0), g_0\big)\big|$ and $u(t) \in TC(u_0)$ for all $t \in \mathbb{R}$.

By Lemma 4.2.8 and equation (4.3.1), we have that

$$\Lambda(H_u h) = -\frac{1}{2\pi i}(u, h) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(H_u h, \frac{1}{1 - i\varepsilon x}\Big).$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma_j(t) =& \frac{d}{dt}\Big(T(t)e_j(t), e_j(t)\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dt}\Big(xe_j(t) - \frac{1}{2\pi i}\big(e_j(t), \frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)(g(t)-1), e_j(t)\Big)\\ =& \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(xB_{u,n}e_j(t) - \frac{1}{2\pi i}\big(B_{u,n}e_j(t), \frac{1}{1-i\varepsilon x}\big)(g(t)-1), e_j(t)\Big)\\ &- \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}(e_j(t), \frac{1}{1-i\varepsilon x})\Big(\frac{i}{4}H_u^{2n-2}(g) + B_{u,n}(g), e_j(t)\Big)\\ &+ \Big(T(t)e_j(t), B_{u,n}e_j(t)\Big)\\ =& \Big([T, B_{u,n}]e_j(t), e_j(t)\Big) + \Lambda(e_j(t))\Big(\frac{i}{4}H_u^{2n-2}(g) + B_{u,n}(g), e_j(t)\Big)\\ =& \frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{2n-2}\Big(e_j(t), H_u^{2n-2-k}(g)\Big)\Big(H_u^k(g), e_j(t)\Big)\\ &+ \frac{1}{8\pi}\Big(e_j(t), H_u^{2n-2}(g)\Big)\big(g, e_j(t)\big) - \Lambda(e_j(t))\Big(B_{u,n}(g), e_j(t)\Big)\\ &+ \frac{i}{4}\Lambda(e_j(t))\Big(H_u^{2n-2}(g), e_j(t)\Big) + \Lambda(e_j(t))\Big(B_{u,n}(g), e_j(t)\Big).\end{aligned}$$

Writing $e_j(t) = H_{u(t)}f_j(t) \in \mathrm{Ran}(H_{u(t)})$, we have

$$\begin{aligned}\Lambda(e_j(t)) = \Lambda\big(H_{u(t)}f_j(t)\big) &= -\frac{1}{2\pi i}\big(u(t), f_j(t)\big) = -\frac{1}{2\pi i}\big(H_{u(t)}g(t), f_j(t)\big)\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\big(H_{u(t)}f_j(t), g(t)\big) = -\frac{1}{2\pi i}\big(e_j(t), g(t)\big)\\ &= -\frac{1}{2\pi i}e^{-i\phi_j(t)}\big(e_j(0), g_0\big) = -\frac{1}{2\pi i}\big(e_j(t), g(t)\big).\end{aligned}$$

Then

$$\frac{d}{dt}\gamma_j(t) = \frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{2n-2}\lambda_j^{2n-2}\nu_j^2 + \frac{1}{8\pi}\lambda_j^{2n-2}\nu_j^2 - \frac{1}{8\pi}\lambda_j^{2n-2}\nu_j^2 = \frac{n-1}{4\pi}\lambda_j^{2n-2}\nu_j^2.$$

□

Proposition 4.6.6. *If $u \in \mathcal{M}(N)_{\text{gen}}$, then*

$$u(x) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j,k=1}^{N}\lambda_j\nu_j\nu_k e^{2i\phi_j}\overline{(T-xI)^{-1}_{jk}},$$

where

$$Te_j = \sum_{k\neq j}\frac{\lambda_j\nu_j\nu_k}{2\pi i}\cdot\frac{\lambda_j-\lambda_k e^{i(2\phi_j-2\phi_k)}}{\lambda_k^2-\lambda_j^2}e_k + (\gamma_j + i\frac{\nu_j^2}{4\pi})e_j, \tag{4.6.10}$$

for all $j \in \{1,2,\dots,N\}$. In particular, χ is a one to one map.

Démonstration. The proof follows the same lines as the proof of Theorem 4.1.7. The only difference is that we work with the orthonormal basis $\tilde{e}_j = e^{i\phi_j}e_j$. Since H_u is anti-linear, the orhonormal basis $\{e_j\}_{j=1}^N$ satisfying $H_u e_j = \lambda_j e_j$ is determined only modulo the sign of e_j. Therefore, $\phi_j = \arg(e_j, u_0)$ is determined modulo π. We intend to introduce generalized action-angle coordinates, and the angles should be defined modulo 2π. Considering the basis $\tilde{e}_j$, the formulas we obtain only depend on $2\phi_j$, which are therefore good candidates for the angles. □

Proof of Theorem 4.1.14. Let us first notice that, if we prove that χ is a symplectic diffeomorphism, then the coordinates $(2\lambda_j^2\nu_j^2, 4\pi\lambda_j^2, 2\phi_j, \gamma_j)$ are canonical. Denote $I_j = 2\lambda_j^2\nu_j^2$. By equation $E = 2J_4 = 2\sum_{j=1}^N \lambda_j^4\nu_j^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 I_j$ and using Proposition 4.6.5, we obtain that for the flow of the Szegö equation we have :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2\phi_j(t)) &= \{E, 2\phi_j\} = 4\{J_4,\phi_j\} = \lambda_j^2\\ \frac{d}{dt}\gamma_j(t) &= \{E,\gamma_j\} = 2\{J_4,\gamma_j\} = \frac{\lambda_j^2\nu_j^2}{2\pi}.\end{aligned}$$

Thus, the Szegö equation can be indeed rewritten as

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}I_j = 0\\ \frac{d}{dt}\phi_j(t) = \frac{\partial E}{\partial I_j}\\ \frac{d}{dt}(4\pi\lambda_j^2) = 0\\ \frac{d}{dt}\gamma_j(t) = \frac{\partial E}{\partial(4\pi\lambda_j^2)}.\end{cases}$$

The first step in proving that χ is a symplectic diffeomorphism is to compute the Poisson brackets between actions and (generalized) angles. This will lead to χ being a local diffeomorphism.

4.6.1 Poisson brackets between actions and (generalized) angles

First notice that

$$J_{2n}(u) = (u, H_u^{2n-2}u) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{2n}\nu_k^2. \tag{4.6.11}$$

Fix $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Writing

$$\{J_{2n}, 2\phi_j\} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{2n-2}\{\lambda_k^2\nu_k^2, 2\phi_j\} + \sum_{k=1}^{N}(n-1)\lambda_k^{2n-2}\nu_k^2\{\lambda_k^2, 2\phi_j\}$$

for all $n = 1, 2, \dots, 2N$ we obtain the following linear system of equations :

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{2n-2}\{\lambda_k^2\nu_k^2, 2\phi_j\} + \sum_{k=1}^{N}(n-1)\lambda_k^{2n-2}\nu_k^2\{\lambda_k^2, 2\phi_j\} = \frac{\lambda_j^{2n-2}}{2}$$

with $2N$ unknowns, $\{\lambda_k^2\nu_k^2, \phi_j\}$ and $\lambda_k^2\nu_k^2\{\lambda_k^2, \phi_j\}$. The matrix of this system is invertible. Indeed, supposing by absurd that the matrix is not invertible, it results that the columns are linearly dependent. Therefore, there exist numbers a_n, $n = 1, 2, \dots, 2N$, not all zero, such that

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n(\lambda_k^2)^{n-1} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{2N} a_n(n-1)(\lambda_k^2)^{n-2} = 0.$$

Considering the polynomial $P(x) = \sum_{n=1}^{2N} a_n X^{n-1}$, this yields $P(\lambda_k^2) = 0$, $P'(\lambda_k^2) = 0$. Thus, each λ_k^2 is a double root of the polynomial. Since a polynomial of degree $2N-1$ with $2N$ roots is identically zero, we obtain a contradiction. Therefore, the system is a Cramer system and one can easily verify that its solutions are

$$\{\lambda_k^2\nu_k^2, 2\phi_j\} = \frac{\delta_{kj}}{2} \tag{4.6.12}$$

$$\{\lambda_k^2, 2\phi_j\} = 0. \tag{4.6.13}$$

Similarly, computing $\{J_{2n}, \gamma_j\}$, we obtain the Cramer system

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{2n-2}\{\lambda_k^2\nu_k^2, \gamma_j\} + \sum_{k=1}^{N}(n-1)\lambda_k^{2n-2}\nu_k^2\{\lambda_k^2, \gamma_j\} = \frac{n-1}{4}\lambda_j^{2n-2}\nu_j^2$$

with solutions

$$\{\lambda_k^2\nu_k^2, \gamma_j\} = 0 \tag{4.6.14}$$

$$\{\lambda_k^2, \gamma_j\} = \frac{\delta_{kj}}{4\pi}. \tag{4.6.15}$$

Since λ_j^2 and ν_j^2 are conserved by the flow of any of the equations in the Szegö hierarchy, we have that

$$\{J_{2n}, \lambda_j^2\} = \frac{d}{dt}\lambda_j^2 = 0, \qquad \{J_{2n}, \nu_j^2\} = \frac{d}{dt}\nu_j^2 = 0.$$

Proceeding as above, we have two homogeneous Cramer systems, whose solutions must be null. Thus, we obtain

$$\{\lambda_k^2\nu_k^2, \lambda_j^2\} = 0 \tag{4.6.16}$$

$$\{\lambda_k^2, \lambda_j^2\} = 0 \tag{4.6.17}$$

$$\{\lambda_k^2\nu_k^2, \lambda_j^2\nu_j^2\} = 0. \tag{4.6.18}$$

4.6.2 χ is a local diffeomorphism

The fact that χ is a local diffeomorphism is equivalent to proving that the differentials $d\lambda_j^2$, $d(\lambda_j^2\nu_j^2)$, $d\phi_j$, $d\gamma_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, are linearly independent. Suppose

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j d(\lambda_j^2) + \beta_j d(\lambda_j^2\nu_j^2) + \theta_j d\phi_j + \eta_j d\gamma_j = 0.$$

Applying this differential to the vector field $X_{\lambda_k^2}$, using $df(X_g) = \{g, f\}$, (4.6.17), (4.6.16), (4.6.13), and (4.6.15), we obtain

$$\sum_{j=1}^{N} \eta_j \frac{\delta_{kj}}{4\pi} = 0$$

and thus $\eta_k = 0$, for all $k = 1, 2, \dots, N$. Applying the same differential to $X_{\lambda_k^2\nu_k^2}$ and using (4.6.16), (4.6.18), and (4.6.12), we obtain $\theta_k = 0$ for all $k = 1, 2, \dots, N$. Applying the differential to X_{ϕ_k} and using (4.6.13) and (4.6.12) we have $\beta_k = 0$ for all $k = 1, 2, \dots, N$. Finally, applying the differential to X_{c_k} and using (4.6.15) we obtain $\alpha_k = 0$ for all $k = 1, 2, \dots, N$. Therefore, $d\lambda_j^2$, $d(\lambda_j^2\nu_j^2)$, $d\phi_j$, $d\gamma_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, are linearly independent and χ is a local diffeomorphism.

Since a bijective local diffeomorphism is a diffeomorphism, and we have by Proposition 4.6.6 that χ is one to one, we only need to show that χ is onto. A proper local diffeomorphism taking values in a connected manifold is onto. Thus, it is enough to show that χ is proper.

4.6.3 χ is a proper mapping

Let $K \subset \Omega$ be a compact set. Set

$$\begin{aligned}\left(I^{(p)}, \tilde{I}^{(p)}, 2\phi^{(p)}, \gamma^{(p)}\right) &:= \left(2\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2\big(\nu_j^{(p)}\big)^2, 4\pi\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2, 2\phi_j^{(p)}, \gamma_j^{(p)}\right)_{j=1}^{N}\\ (I, \tilde{I}, 2\phi, \gamma) &:= \left(2\lambda_j^2\nu_j^2, 4\pi\lambda_j^2, 2\phi_j, \gamma_j\right)_{j=1}^{N}.\end{aligned}$$

Let $(I^{(p)}, \tilde{I}^{(p)}, 2\phi^{(p)}, \gamma^{(p)}), (I, \tilde{I}, 2\phi, \gamma) \in K$ such that

$$\left(I_j^{(p)}, \tilde{I}_j^{(p)}, 2\phi_j^{(p)}, \gamma_j^{(p)}\right) \to (I, \tilde{I}, 2\phi, \gamma) \text{ as } p \to \infty. \tag{4.6.19}$$

Consider $u_p \in \chi^{-1}\left(I^{(p)}, \tilde{I}^{(p)}, 2\phi^{(p)}, \gamma^{(p)}\right)$. Then $\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2$ are the eigenvalues of $H_{u_p}^2$. By Lemma 3.5 in [75], which states that H_u is a Hilbert-Schmidt operator of norm $\|H_u\|_{H-S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_{\dot{H}_+^{1/2}}$, we have that

$$\begin{aligned}\|u_p\|_{L_+^2}^2 =& J_2(u_p) = \sum_{j=1}^{N}\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2(\nu_j^{(p)})^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} I_j^{(p)},\\ \|u_p\|_{\dot{H}_+^{1/2}}^2 =& 2\pi\|H_{u_p}\|_{H-S}^2 = 2\pi\mathrm{Tr}(H_{u_p}^2) = 2\pi\sum_{j=1}^{N}\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\tilde{I}_j^{(p)}.\end{aligned}$$

Since $I^{(p)} \to I$ and $\tilde{I}^{(p)} \to \tilde{I}$ as $p \to \infty$, this yields that $\|u_p\|_{H^{1/2}}$ is bounded. Consequently, there exists $u \in H_+^{1/2}$ such that $u_p \rightharpoonup u$ in $H_+^{1/2}$. It follows in particular that $u_p \to u$ in L^2_{loc}. We denote by $\lambda_j(u)$, $\nu_j(u)$, $\phi_j(u)$, and $\gamma_j(u)$ the spectral data for u.

By Proposition 4.6.6, we have that

$$u_p(x) = \frac{i}{2\pi}\sum_{j,k=1}^{N}\lambda_j^{(p)}\nu_j^{(p)}\nu_k^{(p)}e^{2i\phi_j^{(p)}}\overline{(T^{(p)} - xI)_{jk}^{-1}},$$

where $(T^{(p)} - xI)_{jk}^{-1}$ is a component of the matrix $(T^{(p)} - xI)^{-1}$ in the basis $\{e_j^{(p)}\}_{j=1}^{N}$, and

$$T^{(p)}e_j^{(p)} = \sum_{k\neq j}\frac{\lambda_j^{(p)}\nu_j^{(p)}\nu_k^{(p)}}{2\pi i}\cdot\frac{\lambda_j^{(p)} - \lambda_k^{(p)}e^{i(2\phi_j^{(p)} - 2\phi_k^{(p)})}}{(\lambda_k^{(p)})^2 - (\lambda_j^{(p)})^2}e_k + \left(\gamma_j^{(p)} + i\frac{\big(\nu_j^{(p)}\big)^2}{4\pi}\right)e_j,$$

for all $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. By equation (4.6.19), there exists $R > 0$ such that $\|T^{(p)}\| \leq \frac{R}{2}$ for all $p \in \mathbb{N}$. Using the Neumann series, we have that if $|x| \geq R$, then there exists $A > 0$ such that

$$\|(T^{(p)} - xI)^{-1}\| \leq \frac{A}{|x|},$$

for all $p \in \mathbb{N}$. This yields that

$$\lim_{R\to\infty} \sup_p \int_{|x|>R} |u_p(x)|^2 dx \leq \lim_{R\to\infty} \int_{|x|>R} \frac{A^2}{|x|^2} dx = 0.$$

Since $u_p \to u$ in L^2_{loc}, this triggers $u_p \to u$ in $L^2_+(\mathbb{R})$.

Let us now prove that $H_{u_p}(h) \to H_u(h)$ in L^2_+, for all $h \in L^2_+$. First, notice that there exists $C > 0$ such that

$$\|H_{u_p} - H_u\| = \|H_{u_p - u}\| \leq \|H_{u_p - u}\|_{H-S} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u_p - u\|_{\dot{H}^{1/2}_+} \leq C.$$

In particular, it follows that it suffices to prove that $H_{u_p}(h) \to H_u(h)$ for h in a dense subset of L^2_+, for example $h \in L^\infty \cap L^2_+$. For such h, we have that

$$\|H_{u_p}(h) - H_u(h)\|_{L^2_+} = \|H_{u_p - u}(h)\|_{L^2_+} = \|\Pi\big((u_p - u)\bar{h}\big)\|_{L^2} \leq \|u_p - u\|_{L^2_+} \|h\|_{L^\infty}$$

Thus, $u_p \to u$ in $L^2(\mathbb{R})$ yields $H_{u_p}(h) \to H_u(h)$ in L^2_+.

As a consequence, we have that $J_{2n}(u_p) \to J_{2n}(u)$ as $p \to \infty$. Indeed, we write

$$\begin{aligned} J_{2n}(u_p) - J_{2n}(u) =& (H^{2n-2}_{u_p} u_p, u_p) - (H^{2n-2}_u u, u) \\ =& (H^{2n-2}_{u_p} u_p, u_p - u) + (H^{2n-2}_{u_p}(u_p - u), u) \\ &+ \sum_{j=1}^{2n-2} (H^{2n-2-j}_{u_p} H_{u_p - u} H^{j-1}_u u, u). \end{aligned}$$

For the first term we notice that

$$\begin{aligned} |(H^{2n-2}_{u_p} u_p, u_p - u)| &\leq \|H^{2n-2}_{u_p} u_p\|_{L^2} \|u_p - u\|_{L^2} \leq \|H_{u_p}\|^{2n-2} \|u_p\|_{L^2_+} \|u_p - u\|_{L^2_+} \\ &\leq C \|u_p\|^{2n-2}_{\dot{H}^{1/2}_+} \|u_p\|_{L^2_+} \|u_p - u\|_{L^2_+} \to 0 \text{ as } p \to \infty. \end{aligned}$$

For the second term we have that

$$\begin{aligned} |(H^{2n-2}_{u_p}(u_p - u), u)| &\leq \|H^{2n-2}_{u_p}(u_p - u)\|_{L^2_+} \|u\|_{L^2_+} \leq \|H_{u_p}\|^{2n-2} \|u_p - u\|_{L^2_+} \|u\|_{L^2_+} \\ &\leq \|u_p\|^{2n-2}_{\dot{H}^{1/2}_+} \|u_p - u\|_{L^2_+} \|u\|_{L^2_+} \to 0 \text{ as } p \to \infty. \end{aligned}$$

For the other terms, in the case when j is even, we use the self-adjointness of the operator H_u^2. We then obtain :

$$\begin{aligned}|(H_{u_p}^{2n-2-j}H_{u_p-u}H_u^{j-1}u,u)| =&|(H_{u_p-u}H_u^{j-1}u,H_{u_p}^{2n-2-j}u)|\\ &\leq \|H_{u_p-u}H_u^{j-1}u\|_{L^2_+}\|H_{u_p}^{2n-2-j}u\|_{L^2_+}\\ &\leq \|H_{u_p-u}H_u^{j-1}u\|_{L^2_+}\|u_p\|_{\dot H^{1/2}_+}^{2n-2-j}\|u\|_{L^2_+},\end{aligned}$$

and the first factor tends to zero since $H_{u_p-u}(h)\to 0$ in L^2_+ for all $h\in L^2_+$. For the case when j is odd, we use equation (4.1.3) and then proceed similarly.

We prove in the following that $\lambda_j(u)=\lambda_j$ and $\nu_j(u)=\nu_j$. Since, by equation (4.6.11), $J_{2(n+1)}(u_p)=\sum_{j=1}^N \big(\lambda_j^{(p)}\big)^{2(n+1)}\big(\nu_j^{(p)}\big)^2$, we have that

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty x^nJ_{2(n+1)}(u_p) &= \sum_{n=0}^\infty x^n\sum_{j=1}^N \big(\lambda_j^{(p)}\big)^{2(n+1)}\big(\nu_j^{(p)}\big)^2\\ &=\sum_{j=1}^N \big(\lambda_j^{(p)}\big)^2\big(\nu_j^{(p)}\big)^2\sum_{n=0}^\infty x^n\big(\lambda_j^{(p)}\big)^{2n}=\sum_{j=1}^N\frac{\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2\big(\nu_j^{(p)}\big)^2}{1-x\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2},\end{aligned}$$

for $|x|<1/\lambda_j^2$, and thus for every x distinct from the poles. Then, using $\lambda_j^{(p)}\to\lambda_j$ and $\nu_j^{(p)}\to\nu_j$, we obtain

$$\sum_{n=0}^\infty x^nJ_{2(n+1)}(u_p)\to\sum_{j=1}^N\frac{\lambda_j^2\nu_j^2}{1-x\lambda_j^2}.$$

On the other hand, we have that

$$\sum_{n=0}^\infty x^nJ_{2(n+1)}(u_p)\to\sum_{n=0}^\infty x^nJ_{2(n+1)}(u)=\sum_{j=1}^N\frac{\big(\lambda_j(u)\big)^2\big(\nu_j(u)\big)^2}{1-x\big(\lambda_j(u)\big)^2}.$$

Therefore,

$$\sum_{j=1}^N\frac{\lambda_j^2\nu_j^2}{1-x\lambda_j^2}=\sum_{j=1}^N\frac{\big(\lambda_j(u)\big)^2\big(\nu_j(u)\big)^2}{1-x\big(\lambda_j(u)\big)^2},$$

which yields, by identification, $\lambda_j(u)=\lambda_j$ and $\nu_j(u)=\nu_j$.

At last, we show that $e_j(u_p)\to\pm e_j(u)$. It then follows that

$$\begin{aligned}2\phi_j^{(p)} =&2\phi_j(u_p)=\arg(u_p,e_j(u_p))^2\to\arg(u,e_j(u))^2=2\phi_j(u)\\ \gamma_j^{(p)} =&\gamma_j(u_p)=\mathrm{Re}(T^{(p)}e_j(u_p),e_j(u_p))\to\mathrm{Re}(Te_j(u),e_j(u))=\gamma_j(u).\end{aligned}$$

Since, by (4.6.19), we also have $2\phi_j^{(p)} \to 2\phi_j$ and $\gamma_j^{(p)} \to \gamma_j$, we obtain that $2\phi_j(u) = 2\phi_j$ and $\gamma_j(u) = \gamma_j$. Hence $\chi(u) = (I, \tilde{I}, 2\phi, \gamma) \in K$, and $u \in \chi^{-1}(K)$. Thus $\chi^{-1}(K)$ is compact, which proves that χ is proper.

We still need to show that $e_j(u_p) \to \pm e_j(u)$. Using $\lambda_j^{(p)} \to \lambda_j = \lambda_j(u)$, $\nu_j^{(p)} \to \nu_j = \nu_j(u)$, we have that

$$\|u_p\|_{\dot{H}_+^{1/2}} = \sum_{j=1}^{N} \big(\lambda_j^{(p)}\big)^2 \big(\nu_j^{(p)}\big)^2 \to \sum_{j=1}^{N} \big(\lambda_j(u)\big)^2 \big(\nu_j(u)\big)^2 = \|u\|_{\dot{H}_+^{1/2}}.$$

Since $u_p \rightharpoonup u$ in $H_+^{1/2}$ and $u \to u$ in L_+^2, it follows that $u_p \to u$ in $H_+^{1/2}$. This yields that $H_{u_p} \to H_u$ in the sense of the norm. As a consequence, setting

$$P_j^{(p)} h := (h, e_j(u_p)) e_j(u_p).$$

to be the orthogonal projection onto the eigenspace of $H_{u_p}^2$, corresponding to the eigenvalue $\big(\lambda_j^{(p)}\big)^2$ and similarly,

$$P_j(u) h := (h, e_j(u)) e_j(u)$$

to be the orthogonal projection onto the eigenspace of H_u^2, corresponding to the eigenvalue $\lambda_j^2(u)$, we have by Theorem VIII.23 in [81], that $P_j^{(p)} \to P_j(u)$.

Therefore, $(h, e_j(u_p)) e_j(u_p) \to (h, e_j(u)) e_j(u)$ as $p \to \infty$, for all $h \in L_+^2$. Taking $h = e_j(u)$, we have that $(e_j(u), e_j(u_p)) e_j(u_p) \to e_j(u)$. Since $e_j(u_p)$ and $e_j(u)$ are unitary vectors, we notice that $|(e_j(u), e_j(u_p))| = 1$. Then, using the relation (4.1.3), we have

$$\begin{aligned}
(e_j(u), e_j(u_p)) &= \frac{1}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u), H_{u_p} e_j(u_p)) \\
&= \frac{1}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u), H_u e_j(u_p)) + \frac{1}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u), H_{u_p - u} e_j(u_p)) \\
&= \frac{1}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u_p), H_u e_j(u)) + \frac{1}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u), H_{u_p - u} e_j(u_p)) \\
&= \frac{\lambda_j(u)}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u_p), e_j(u)) + \frac{1}{\lambda_j^{(p)}} (e_j(u_p), H_{u_p - u} e_j(u))
\end{aligned}$$

Letting $p \to \infty$, we obtain

$$\lim_{p\to\infty} (e_j(u), e_j(u_p)) = \lim_{p\to\infty} (e_j(u_p), e_j(u)) = \overline{\lim_{p\to\infty} (e_j(u), e_j(u_p))}.$$

Since the above limit is of absolute value 1, we obtain that $\lim_{p\to\infty} (e_j(u), e_j(u_p)) = \pm 1$ and therefore $e_j(u_p) \to \pm e_j(u)$ as $p \to \infty$.

4.6.4 χ is a symplectic transformation

We proved so far that χ is a diffeomorphism and we computed the Poisson brackets between actions and (generalized) angles. In order to prove that χ is symplectic, we only need to prove that the Poisson brackets involving only angles and generalized angles, $\{\phi_j, \phi_k\}$, $\{\gamma_j, \phi_k\}$, and $\{\gamma_j, \gamma_k\}$, are zero.

We first remark that the Jacobi identity yield that $\{\phi_j, \phi_k\}$, $\{\gamma_j, \phi_k\}$, and $\{\gamma_j, \gamma_k\}$ are only functions of λ_ℓ^2 and $\lambda_\ell^2\nu_\ell^2$ for $\ell = 1, 2, \dots, N$. Indeed, for the first one we take $f = \lambda_\ell^2$ and then $f = \lambda_\ell^2\nu_\ell^2$ in

$$\{f, \{\phi_j, \phi_k\}\} + \{\phi_k, \{f, \phi_j\}\} + \{\phi_j, \{\phi_k, f\}\} = 0, \tag{4.6.20}$$

which gives by (4.6.12), (4.6.13), that

$$\{\lambda_\ell^2, \{\phi_j, \phi_k\}\} = \{\lambda_\ell^2\nu_\ell^2, \{\phi_j, \phi_k\}\} = 0. \tag{4.6.21}$$

Writing $\{\phi_j, \phi_k\} = h(\lambda_\ell^2, \lambda_\ell^2\nu_\ell^2, \phi_\ell, \gamma_\ell)$ for $\ell = 1, 2, \dots, N$, we obtain

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_\ell} = \frac{\partial h}{\partial \gamma_\ell} = 0. \tag{4.6.22}$$

Define now $J_1(u) = (u, g)$ and $J_3(u) = (H_u^2 u, g)$. We will compute $\{J_1, J_3\}$ to prove that $\{\phi_j, \phi_k\} = 0$. We have that

$$\begin{aligned} d_u J_1(h) &= \lim_{t\to 0} \frac{\big(u + th, g(u + th)\big) - (u, g(u))}{t} = (h, g(u)) + \lim_{t\to 0}\Big(u, \frac{g(u + th) - g(u)}{t}\Big) \\ &= (h, g(u)) + (u, d_u g(h)) = (h, g(u)) + \big(H_u g, d_u g(h)\big) \\ &= (h, g(u)) + \big(H_u(d_u g(h)), g\big). \end{aligned}$$

In order to compute $H_u(d_u g(h))$, we differentiate the equation $u = H_u g$:

$$\begin{aligned} h &= \lim_{t\to 0} \frac{H_{u+th} g(u + th) - H_u g(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\Big(H_u\Big(\frac{g(u + th) - g(u)}{t}\Big) + H_h g(u + th)\Big) \\ &= H_u(d_u g(h)) + H_h(g). \end{aligned}$$

Thus, $H_u(d_u g(h)) = h - H_h(g) = \Pi(h(1 - \bar{g}))$ and $d_u J_1(h) = (h, g) + (h, g(1 - g))$.

Therefore, the vector fields corresponding to the real and imaginary part of J_1 are :

$$X_{\mathrm{Re}J_1} = -\frac{i}{4}\big(g + g(1 - g)\big), \quad X_{\mathrm{Im}J_1} = \frac{1}{4}\big(g + g(1 - g)\big).$$

Similarly we have that

$$\begin{aligned} d_u J_3(h) &= (H_u^2 h, g) + (H_u H_h u + H_h H_u u, g) + (H_u^2 u, d_u g(h)) \\ &= (h, H_u^2 g) + (H_u g, H_h u) + (H_h H_u u, g) + \big(H_u(d_u g(h)), H_u u\big) \\ &= (h, H_u u) + (u^2, h) + (h, gH_u u) + \big(h, (1-g)H_u u\big) = 2(h, H_u u) + (u^2, h). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \{J_1, J_3\} =& d_u J_3 \cdot X_{\mathrm{Re} J_1}(u) + i d_u J_3 \cdot X_{\mathrm{Im} J_1}(u) \\ =& 2\Big(-\frac{i}{4}\big(g + g(1-g)\big), H_u u\Big) + \Big(u^2, -\frac{i}{4}\big(g + g(1-g)\big)\Big) \\ &+ 2i\Big(\frac{1}{4}\big(g + g(1-g)\big), H_u u\Big) + i\Big(u^2, \frac{1}{4}\big(g + g(1-g)\big)\Big) \\ =& \frac{i}{2}\big(u^2, g + g(1-g)\big). \end{aligned}$$

Using equations (4.1.10) and (4.6.1), we have

$$\begin{aligned} (u^2, g + (1-g)g) =& (u^2, g) + (u^2, (1-g)g) = (u^2, g) + (u(1-\bar{g}), \bar{u}g) \\ =& (u^2, g) + (u(1-\bar{g}), (I - \Pi)(\bar{u}g)) = (u^2, g) + (u(1-\bar{g}), \overline{\Pi(u\bar{g})}) \\ =& (u^2, g) + (u(1-\bar{g}), \bar{u}) = (u^2, g) + \int_{-\infty}^{\infty} u^2 - (u^2, g) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 = 0. \end{aligned}$$

Thus, we obtain $\{J_1, J_3\} = 0$. On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \{J_1, J_3\} =& \Big\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \nu_j^2 e^{-2i\phi_j}, \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^3 \nu_k^2 e^{-2i\phi_k} \Big\} \\ =& \sum_{j,k=1}^{N} e^{-2i(\phi_j + \phi_k)} \Big(-i\{\lambda_j \nu_j^2, \phi_k\} + i\{\lambda_k^3 \nu_k^2, \phi_j\} + \{\phi_j, \phi_k\} \lambda_j \lambda_k^3 \nu_j^2 \nu_k^2 \Big). \end{aligned}$$

Since $\{\phi_j, \phi_k\}$ only depends on λ_ℓ^2 and $\lambda_\ell^2 \nu_\ell^2$, $\ell = 1, 2, \dots, N$, we have that the coefficient of $e^{-2i(\phi_j + \phi_k)}$ in the above expression is

$$-i\{\lambda_j \nu_j^2, \phi_k\} - i\{\lambda_k \nu_k^2, \phi_j\} + i\{\lambda_k^3 \nu_k^2, \phi_j\} + i\{\lambda_j^3 \nu_j^2, \phi_k\} + \{\phi_j, \phi_k\} \lambda_j \lambda_k \nu_j^2 \nu_k^2 (\lambda_j^2 - \lambda_k^2).$$

Comparing the two expressions for $\{J_1, J_3\}$, we have that $\{J_1, J_3\}$ is a trigonometric polynomial which is equal to zero. Therefore all its coefficients are zero, which triggers, by taking the real part, that $\{\phi_j, \phi_k\} = 0$.

In order to compute $\{\gamma_j, \gamma_k\}$ and $\{2\phi_j, \gamma_k\}$ we denote $A := (Tu, u)$, $C := (Tu, g)$ and compute $\{A, C\}$ in two different ways. First, we use

$\{A, C\}(u) = d_u C \cdot X_{\mathrm{Re}A} + i d_u C \cdot X_{\mathrm{Im}A}$. Since

$$d_u A(h) = 2\mathrm{Re}(h, Tu) + \Lambda(u)\big(g(1-g), h\big) + \big(h, \frac{1}{2\pi i}(u, g)g\big),$$

for all h rational function (notice that we extend the definition of T to $\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathcal{M}(N)$), we obtain the following Hamiltonian vector fields :

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{Re}A} &= -\frac{i}{2}Tu - \frac{i}{4}\Lambda(u)g(1-g) - \frac{1}{8\pi}(u,g)g, \\ X_{\mathrm{Im}A} &= -\frac{1}{4}\Lambda(u)g(1-g) - \frac{i}{8\pi}(u,g)g. \end{aligned}$$

Similarly we have

$$d_u C(h) = \Lambda(u)(f(1-g), h) - \frac{1}{2\pi i}(u,g)(h, f(1-g)) + (Th, g) + (h, (1-g)Tg),$$

where f is the unique element in $\mathrm{Ran}(H_u)$ such that $H_u f = g$. By Lemma 4.2.1, we have that $\mathrm{Ker}(H_u) = (1-g)L^2_+$ and using the orthogonality of $\mathrm{Ker}(H_u)$ and $\mathrm{Ran}(H_u)$ we obtain

$$\{A, C\} = -\frac{i}{2}(T^2 u, g) + \frac{1}{4\pi}\Lambda(u)(u,g)(g,f) - \frac{i}{2}\Lambda(u)(Tg(1-g), g) - \frac{i}{2}\Lambda(u)(g, Tg).$$

Notice also that, by Lemmas 4.2.1 and 4.2.11, we have

$$\begin{aligned} Tg(1-g) &= xg(1-g) - \Lambda\big(g(1-g)\big)(1-g) = xg(1-g) - \Lambda(g)(1-g) \\ &= (1-g)T^* g \in \mathrm{Ker}(H_u), \end{aligned}$$

and thus by orthogonality of $\mathrm{Ker}(H_u)$ and $\mathrm{Ran}(H_u)$, the third term vanishes. By (4.2.21), we rewrite the first term as

$$-\frac{i}{2}(T^2 u, g) = -\frac{i}{2}\Big(T^*Tu - \frac{1}{2\pi i}(Tu, g)g, g\Big) = -\frac{i}{2}(Tu, Tg) + \frac{1}{4\pi}(Tu, g)(g, g).$$

Hence, we have

$$\{A, C\} = -\frac{i}{2}(Tu, Tg) + \frac{1}{4\pi}(Tu, g)(g, g) + \frac{1}{4\pi}\Lambda(u)(u,g)(g,f) - \frac{i}{2}\Lambda(u)(g, Tg).$$

Proceeding as in the case of $\{J_1, J_3\}$, we obtain after tedious computations that $\{\gamma_j, 2\phi_k\} = 0$ and $\{\gamma_j, \gamma_k\} = 0$ for all $j, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, which proves that the coordinates we defined are symplectic.

□

Proof of Corollary 4.1.15. Fixing λ_j and ν_j the application χ in Theorem 4.1.14 yields a diffeomorphism between $TC(u_0)$ and $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. □

Chapitre 5

First and second order approximations for a nonlinear wave equation

Ce chapitre est la reprise d'un article en préparation.

5.1 Introduction

One of the most important properties in the study of the nonlinear Schrödinger equations (NLS) is *dispersion*. It is often exhibited in the form of the Strichartz estimates of the corresponding linear flow. In case of the cubic NLS :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times M, \tag{5.1.1}$$

Burq, Gérard, and Tzvetkov [17] observed that the dispersive properties are strongly influenced by the geometry of the underlying manifold M. Taking this idea further, Gérard and Grellier [35] remarked that dispersion disappears completely when M is a sub-Riemannian manifold or when the Laplacian is replaced by the Grushin operator. In those cases, by conveniently decomposing the function u, we obtain that at least in the radial case, the Schrödinger equation is equivalent to the following system of transport equations :

$$i(\partial_t \pm (2m+1)\partial_x)u_m = \Pi_m(|u|^2 u), \tag{5.1.2}$$

where Π_m are pseudo-differential orthogonal projectors. Therefore, studying the Schrödinger equation in a non-dispersive situation comes down to studying a system of the above type.

In this paper we consider the following nonlinear wave equation on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v, \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{NLW}$$

where $D = -i\partial_x$. It is indeed a nonlinear wave equation since by applying the operator $i\partial_t + |D|$ to both sides of the equation, we obtain :

$$-\partial_{tt}v + \Delta v = |v|^4 v + 2|v|^2(|D|v) - v^2(|D|\bar{v}) + |D|(|v|^2 v).$$

Equation (NLW) was studied on $\mathbb{T}$ by Gérard and Grellier in [37].

We consider the Hardy spaces on the unit disc and upper upper-half plane :

$$L^2_+(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T});\ \hat{f}(k) = 0 \text{ if } k < 0\},$$
$$L^2_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R});\ \operatorname{supp} \hat{f} \subset [0,\infty)\},$$

and the corresponding Sobolev spaces $H^s_+(\mathbb{T}) = L^2_+(\mathbb{T}) \cap H^s(\mathbb{T})$ and $H^s_+(\mathbb{R}) = L^2_+(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 0$.

The Szegö projector onto the Hardy space of the unit disc is $\Pi_+ : L^2(\mathbb{T}) \to L^2_+(\mathbb{T})$, defined by :

$$\Pi_+ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

In the case of $\mathbb{R}$, the Szegö projector $\Pi_+ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$ can be defined similarly by :

$$\widehat{\Pi_+ f}(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi), & \text{if } \xi \geq 0, \\ 0, & \text{if } \xi < 0 \end{cases}$$

We also define $\Pi_- = I - \Pi_+$, where I is the identity operator. Applying the projectors Π_+ and Π_- and writing $v = v_+ + v_-$, where $v_+ = \Pi_+(v)$, and $v_- = \Pi_-(v)$, we obtain that equation (NLW) is equivalent to the following system :

$$\begin{cases} i(\partial_t v_+ + \partial_x v_+) = \Pi_+(|v|^2 v) \\ i(\partial_t v_- - \partial_x v_-) = \Pi_-(|v|^2 v). \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Notice that this is a system of transport equations similar to the one obtained from the Schrödinger equation (5.1.2). We expect that the study of this system and therefore the study of the (NLW) equation help us understand better NLS in the case of lack of dispersion.

The (NLW) equation is a Hamiltonian evolution associated to the Hamiltonian

$$E(v) = \frac{1}{2}(|D|v, v) + \frac{1}{4}\|v\|_{L^4}^4,$$

with respect to the symplectic form $\omega(u, v) = \operatorname{Im}\int u\bar{v}dx$. From this structure, we obtain the formal conservation law of energy $E(v(t)) = E(v(0))$. The invariance under translations and under modulations provides two more conservation laws, $Q(v(t)) = Q(v(0))$ and $M(v(t)) = M(v(0))$, where

$$Q(v) = \|v\|_{L^2}^2 \quad \text{and} \quad M(v) = (Dv, v).$$

The conservation of the mass and energy yields a uniform bound on the $H^{1/2}$-norm of the solution of (NLW). Therefore it seems natural to study the well-posedness of (NLW) in $H^{1/2}$. The following result from [37] states that indeed, the (NLW) equation on $\mathbb{T}$ is globally well-posed in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$.

Proposition 5.1.1 ([37])**.** *The nonlinear wave equation* (NLW) *is globally well-posed in $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$. Moreover, if $v_0 \in H^s(\mathbb{T})$ for some $s > \frac{1}{2}$, then $v \in C(\mathbb{R}; H^s)$.*

An analogous result holds for (NLW) equation on $\mathbb{R}$.

In this paper we prove that the solution of the (NLW) equation on $\mathbb{R}$ with an initial condition of order $O(\varepsilon)$ and supported only on positive frequencies, can be approximated by the solution of a simpler equation with the same initial data. The approximation is of order $O(\varepsilon^2)$ and holds for a long time. The approximate equation is the Szegö equation, recently introduced by Gérard and Grellier :

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u). \tag{5.1.4}$$

This equation was studied in details on $\mathbb{T}$ in [35, 36] and on $\mathbb{R}$ in [75, 76]. It is globally well-posed in $H^s_+(\mathbb{T})$ and $H^s_+(\mathbb{R})$ for $s \geq 1/2$. Its most remarkable property is that it is completely integrable, in the sense that it admits a Lax pair. In particular, it possesses an infinite sequence of conservation laws, the strongest one being the $H^{1/2}_+$-norm.

The approximation result for the (NLW) equation on $\mathbb{R}$ was motivated by a similar one proved by Gérard, Grellier [37] in the case of $\mathbb{T}$. The case of $\mathbb{R}$ brings new difficulties related, as we see below, to the low frequencies. Moreover, the method used in the case of $\mathbb{T}$ is the theory of Birkhoff normal forms, which seems difficult to adapt to the case of $\mathbb{R}$. Our result will be proved using the renormalization group method of Chen, Goldfend and Oono [19, 20] coming from theoretical physics.

The heuristic idea that motivated our result on $\mathbb{R}$ and the previous result on $\mathbb{T}$ in [37] is the following. Consider the (NLW) equation with an initial condition v_0 such that $v_0 = \varepsilon u_0$, where $u_0 \in H^{1/2}_+$. Since we have conservation of the momentum and of the energy, it follows that $2E(v(t)) - M(v(t)) = 2E(v_0) - D(v_0)$. This yields :

$$2\big(|D|v_-(t), v_-(t)\big) + \frac{1}{2}\|v(t)\|^4_{L^4} = \frac{1}{2}\|v_{0,+}\|^4_{L^4} = O(\varepsilon^4).$$

Thus, $\|v_-(t)\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{T})} = O(\varepsilon^2)$ for all $t \in \mathbb{R}$. Moreover, we have

$$\|v_-(t)\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{T})} = \sum_{k\leq -1}(1+|k|^2)^{1/2}|\hat{v}(k)|^2 \leq 2\sum_{k\leq -1}|k||\hat{v}(k)|^2 \leq 2\|v_-(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^4).$$

Then, $\|v_-(t)\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})} = O(\varepsilon^2)$. Therefore, $v_-(t)$ is ε^2-small, while the solution $v(t)$ is only ε-small. It seems thus that the dynamics of (NLW) is dominated by $v_+(t)$. We omit then all the terms containing v_- in the nonlinearity of the first equation in (5.1.3), since they are supposed to be small. We obtain that $u(t,x) = v_+(t, x+t)$ almost satisfies the Szegö equation

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u).$$

Hence, it is natural to expect that the Szegö equation provides us with an approximation of the (NLW) equation with a small initial condition supported on positive frequencies.

In the case of $\mathbb{R}$, the conservation of energy and momentum still gives $\|v_-(t)\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R})} = O(\varepsilon^2)$, while we have that $\|v(t)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = O(\varepsilon)$ for all $t \in \mathbb{R}$. However, we have no other information on the L^2-norm of $v_-(t)$. This suggests that the low frequencies cause some new difficulty in proving that v_- is small, and thus in proving that the flow of (NLW) can be approximated by that of the Szegö equation.

A version of the approximation result for the (NLW) equation on $\mathbb{T}$ in [37] is the following theorem.

Theorem 5.1.2 (Gérard-Grellier [37]). *Let $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 \leq \alpha \leq 1/2$, and $\delta > 0$ sufficiently small. Let $s > \frac{1}{2}$ and $W_0 \in H^s(\mathbb{T})$. Let $v(t)$ be the solution of the* (NLW) *equation on $\mathbb{T}$*

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = \mathcal{W}_0 := \varepsilon W_0. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

Denote by $\mathcal{W} \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(\mathbb{T}))$ the solution of the Szegö equation on $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} i\partial_t \mathcal{W} = \Pi_+(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}) \\ \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

with the same initial data. Suppose that $\|\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq C\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$ *for all* $t \in \mathbb{R}$.

Then, if $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, *we have*

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq \varepsilon^{3-C_0\delta},$$

where $C_0 > 0$ *is an absolute constant.*

In the second half of this paper we improve the above result on $\mathbb{T}$. We find a second order approximate solution, given by an equation which is more complex than the Szegö equation, but which provides a smaller error of order ε^5 instead of ε^3, in the approximation. For this purpose, we use the averaging method introduced by Temam and Wirosoetisno in [86].

In what follows we state and briefly comment the main results of the paper.

5.1.1 Main results

First, in the case of $\mathbb{R}$, we consider an initial condition for (NLW) which is supported on positive frequencies only, is of order $O(\varepsilon)$, and such that the corresponding solution of the Szegö equation is bounded for all times by $C\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Then the solution of the (NLW) equation with this initial condition stays ε^2-close to the solution of the Szegö equation with the same initial condition, for times $0 \leq t \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$.

Theorem 5.1.3. *Let* $0 < \varepsilon \ll 1$, $s > \frac{1}{2}$, *and* $W_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$. *Let* $v(t)$ *be the solution of the* (NLW) *on* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = \mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0. \end{cases} \tag{5.1.7}$$

Denote by $\mathcal{W} \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{R}))$ *the solution of the Szegö equation on* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t \mathcal{W} = \Pi_+(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}) \\ \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0. \end{cases} \tag{5.1.8}$$

with the same initial data. Assume that there exist $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ *and* $\delta > 0$ *small enough such that* $\|\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq C\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$ *for all* $t \in \mathbb{R}$.

Then, if $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, *we have that*

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\mathcal{W}(t)\|_{H^s} \leq C_*\varepsilon^{2-C_0\delta},$$

where $C_0 > 0$ *is an absolute constant and* C_* *is a constant depending only on the* $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$*-norm of* W_0.

Notice that the approximation in Theorem 5.1.2 in [37] for the case of $\mathbb{T}$, is better than the one in Theorem 5.1.3 for the case of $\mathbb{R}$ (ε^3 instead of ε^2). This is what we expected even from our heuristic argument above. We will see in the proof that the estimates we have in the case of $\mathbb{R}$ are worse than those for the case of $\mathbb{T}$, due to low frequencies.

Remark 5.1.4. Theorem 5.1.2 was proved in [37] using the theory of Birkhoff normal forms. This method seems to be difficult to adapt to the case of $\mathbb{R}$. The method we use in this paper is the renormalization group method, coming from theoretical physics. The two methods are intimately related. In [93], it was noticed that, for a large class of autonomous ODEs, the nonlinearity which appears in the RG equation of order one is actually the Birkhoff normal form. This result was extended in [24] to order two, for the same class of autonomous ODEs, and to first order, for a class of non-autonomous ODEs. The advantage of the RG method over the normal form theory is that the secular terms are more readily identified by inspection of a naive perturbation expansion, than by inspection of the vector field.

The purpose of the approximation Theorem 5.1.3 is to deduce some information on the (NLW) equation from the known results one has for the Szegö equation. Some particularly interesting solutions of the Szegö equation are those whose initial conditions are non-generic rational functions, for example $W_0 = \frac{1}{x+i} - \frac{2}{x+2i}$. For such solutions, we proved in [76] the following result :

Proposition 5.1.5 ([76]). *Let* $s > 1/2$. *Let* $W \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{R}))$ *be the solution of the Szegö equation*

$$i\partial_t W = \Pi_+(|W|^2 W)$$

with non-generic initial condition $W_0 = \frac{1}{x+i} - \frac{2}{x+2i} \in H^s_+(\mathbb{R})$. *Then, for t large enough, there exist* $C, c > 0$ *such that*

$$c\,t^{2s-1} \le \|W(t)\|_{H^s} \le Ct^{2s-1}.$$

In particular, $\|W(t)\|_{H^s} \to \infty$ *as* $t \to \infty$.

The following corollary proves that the high Sobolev norms of the (NLW) equation with initial condition $\varepsilon W_0 = \frac{\varepsilon}{x+i} - \frac{2\varepsilon}{x+2i}$ grow relatively to the norm of the initial condition.

Corollary 5.1.6. *Let* $0 < \varepsilon \ll 1$, $s > \frac{1}{2}$, *and* $\delta > 0$ *sufficiently small. Let* $W_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$ *be the non-generic rational function* $W_0 = \frac{1}{x+i} - \frac{2}{x+2i}$. *Denote by* $v(t)$ *be the* *solution of the* (NLW) *equation on* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = \varepsilon W_0. \end{cases}$$

Then, for $\frac{1}{2\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}} \le t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}}$*, we have that*

$$\frac{\|v(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}}{\|v(0)\|_{H^s(\mathbb{R})}} \ge C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{4s-2}{4s-1}}.$$

A similar result is available for the case of $\mathbb{T}$ [37].

The time on which the approximation in Theorem 5.1.3 is available, $t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\big)^{1-2\alpha}$, does not allow us to prove the existence of a time t^ε such that $\|v(t^\varepsilon)\|_{H^s(\mathbb{R})} \to \infty$ as $\varepsilon \to 0$. For that to happen, we would need an approximation at least up to a time of order $\frac{1}{\varepsilon^{2+\beta}}$ where $\beta > 0$.

In the case of $\mathbb{T}$, we find the second order approximation, that is an approximation with an error of order ε^5 instead of ε^3. We notice that the effective dynamics are no longer given by the Szegö equation.

Theorem 5.1.7. *Let* $0 < \varepsilon \ll 1$, $s > \frac{1}{2}$, $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$, *and* $\delta > 0$ *small enough. Let* $W_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$ *be such that the solution of the Szegö equation* (5.1.4) *with initial condition* εW_0 *is uniformly bounded by* $\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$ *for all* $t \in \mathbb{R}$. *Denote by* $v(t)$ *the solution of the* (NLW) *equation on* $\mathbb{T}$

$$\begin{cases} i\partial_t v - |D|v = |v|^2 v \\ v(0) = \mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0. \end{cases}$$

Consider $\mathcal{W} \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{T}))$ *to be the solution of the following equation on* $\mathbb{T}$ *:*

$$\begin{cases} i\partial_t \mathcal{W} = \Pi(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}) - \Pi_+(|\mathcal{W}|^2\frac{1}{D}\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})) - \frac{1}{2}\Pi_+(\mathcal{W}^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})}) \\ \mathcal{W}(0) = \mathcal{W}_0. \end{cases} \tag{5.1.9}$$

with the same initial condition.

For a function $h \in H^s(\mathbb{T})$ *set*

$$f_{\text{osc}}(h,t) = e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}h|^2 e^{-i|D|t}h) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i|D|\tau}(|e^{-i|D|\tau}h|^2 e^{-i|D|\tau}h)d\tau.$$

Denote by $F_{\mathrm{osc}}(h,t)$ the unique function of mean zero in t such that $\frac{\partial F_{\mathrm{osc}}}{\partial t}(h,t) = f_{\mathrm{osc}}(h,t)$. Consider

$$v_{\mathrm{app}}(t) = e^{-i|D|t}\big(\mathcal{W}(t) + F_{\mathrm{osc}}(\mathcal{W}(t),t)\big).$$

Then, if $0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, we have

$$\|v(t) - v_{\mathrm{app}}(t)\|_{H^s} \le \varepsilon^{5-C_0\delta},$$

where $C_0 > 0$ is an absolute constant.

The above result cannot be directly extended to the case of $\mathbb{R}$. The main reason is that in equation (5.1.9) we see appear the operator $\frac{1}{D}\Pi_-$. In the case of $\mathbb{T}$, we have that $\frac{1}{D}\Pi_- e^{ikx} = \frac{1}{k}\mathbf{1}_{k\le -1}$ and thus there is no problem related to small divisors. However, in the case of $\mathbb{R}$, if we pass into the Fourier space, we have $\frac{1}{\xi}\mathbf{1}_{\xi<0}$ and when ξ approaches zero, this gives a singularity. A way to get around this singularity would be to consider instead of resonances, i.e. frequencies for which a certain phase is null $\phi = 0$, almost resonances $|\phi| \le \gamma$, for an optimal $\gamma > 0$. However, it seems that this would complicate significantly the dynamics (5.1.9).

In order to prove Theorem 5.1.7, we use an averaging method introduced by Temam and Wirosoetisnoin in [86].

We briefly describe in what follows the renormalization method, the averaging method, the concept of resonance, and their usage in the literature.

5.1.2 The renormalization group method, the averaging method, and the concept of resonance

The renormalization group (RG) method was introduced by Chen, Goldfend, and Oono [19, 20] in the context of theoretical physics, as a unified tool for asymptotic analysis. Its origin goes back to perturbative quantum field theory.

The method is most often used to find a long-time approximate solution to a perturbed equation. The main advantage of the RG method is that it provides an algorithm that can be easily applied to many equations. The starting point is a naive perturbation expansion, so that one does not need to guess or to make ad hoc assumptions about the structure of the perturbation series. Then, the divergent terms in the expansion(unbounded in time), are removed by renormalization. This leads to introducing the renormalization group equation. The solution of the RG equation is the main part of an approximate solution.

The effectiveness of the RG method was illustrated in a variety of examples of ordinary differential equations traditionally analyzed using disparate methods, including the method of multiple scales, boundary layer theory, the WKBJ method, the Poincaré-Lindstedt method, and the method of averaging.

The method was justified mathematically for a large class of ODEs in [93, 24]. It was also rigorously applied to some PDEs on bounded intervals, namely the Navier-Stokes equations [67], a slightly compressible fluid equation and the Swift-Hohenberg equation [68], and the primitive equations of the atmosphere and the ocean [74]. In [3] it was applied to the quadratic nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^3$.

The idea behind the RG method is that the dynamics of an equation is dominated by its resonant part. This idea is also developed in [43] where Grébert and Thomann study the resonant dynamics of the quintic non-linear Schrödinger equation on $\mathbb{T}$. It is used also by Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, and Tao in [22] to prove the existence of solutions for the cubic non-linear Schrödinger equation on $\mathbb{T}^2$ with arbitrarily large high Sobolev norms. One reduces in that context to a resonant equation for which one proves growth of high Sobolev norms, and then shows that this resonant equation provides a good approximation for the initial one.

The averaging method we use in this paper was introduced by Temam and Wirosoetisno in [86] in the context of a class of differential equations. At first order it is related to the RG method, while at higher orders it is related to the asymptotic expansions of Bogolyubov and Mitropol'skii [8].

The RG method can also be applied at higher orders, as it was done for ODEs in [24]. In the case of the (NLW) equation on $\mathbb{T}$, we could prove that at second order the RG equation is exactly the averaged equation (5.1.9) in Theorem 5.1.7. However, the computations one needs to do when applying the RG method at second order are much more tedious than when applying the averaging method. Another reason why we preferred to present the averaging method for the second order approximation, is that this method does not only give the effective dynamics (5.1.9), but also gives an algorithm of how to build an approximate solution and how to estimate the error, which is not at all clear when one applies the RG method at higher orders.

Both the RG and the averaging methods are based on the concept of decomposing the nonlinearity into its resonant and non-resonant parts. Such a decomposition was very effective in proving global existence of small solutions of dispersive equations and scattering. This was done in several works of Germain, Masmoudi, and Shatah [38, 39, 40, 41, 42, 84], who treated the case of the gravity water waves equation in dimension 3, the coupled Klein-Gordon equations with different speeds, and the quadratic nonlinear Schrödinger equation in dimension 2 and 3. Gustafson, Nakanishi, and Tsai treated the case of the Gross-Pitaevskii equation in dimension 3 in [44]. They use time, space, and space-time resonances, whereas in this paper we only consider time resonances.

The specificity of the (NLW) equation is that *the resonant set does not have measure zero*, as it was the case in the above cited papers. For this reason it is natural not to expect scattering, but a long-time approximation of the solution by some effective dynamics governed by the effect of the resonant part of the non-linearity. The decomposition in resonant and non-resonant part, was used in [3], precisely in this purpose in the case of the quadratic Schrödinger equation in dimension 3.

The structure of the paper is as follows. In the rest of the introduction, we heuristically explain the need of splitting the nonlinearity into its resonant and oscillatory part, which is at the basis of both the RG and averaging method. In Section 2, we present the RG method and use it to prove Theorem 5.1.3, dealing with the first order approximation in the case of $\mathbb{R}$. We also prove Corollary 5.1.6 which refers to high Sobolev norm inflation in the case of non-generic initial data. To have a good comparison between the case of $\mathbb{R}$ and that of $\mathbb{T}$, and for a better understanding of the second order approximation in the case of $\mathbb{T}$, in Section 3 we re-prove Theorem 5.1.2 from [37] using the RG method. In Section 4, we present the averaging method at second order and use it to prove Theorem 5.1.7 treating the second order approximation in the case of $\mathbb{T}$.

5.1.3 Heuristics of the proof of Theorem 5.1.3

The first approach to proving Theorem 5.1.3 is the following one. Consider the change of variables $u(t) = \frac{1}{\varepsilon} e^{i|D|t} v(t)$. Then u satisfies the equation :

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\varepsilon^2 e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}u|^2 e^{-i|D|t}u) \\ u(0) = W_0. \end{cases} \tag{5.1.10}$$

Let us now set $W(t) := \frac{\mathcal{W}(t)}{\varepsilon}$. Then $W(t)$ satisfies

$$\begin{cases} i\partial_t W = \varepsilon^2 \Pi_+(|W|^2 W) \\ W(0) = W_0. \end{cases} \tag{5.1.11}$$

Then, setting $w(t) = u(t) - W(t)$, we have

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\mathcal{W}\|_{H^s} = \varepsilon \|e^{-i|D|t}\big(u(t) - W(t)\big)\|_{H^s} = \varepsilon \|w(t)\|_{H^s}.$$

We have that w satisfies the equation

$$\begin{cases} \partial_t w = -i\varepsilon^2 e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}u|^2 e^{-i|D|t}u) + i\varepsilon^2 \Pi_+(|W|^2 W) \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Therefore,

$$w(t) = -i\varepsilon^2 \int_0^t \Big(e^{i|D|\tau}(|e^{-i|D|\tau}u|^2 e^{-i|D|\tau}u) - \Pi_+(|W(\tau)|^2 W(\tau)) \Big) d\tau$$

The classical technique of estimating $w(t)$ consists in writing the right-hand side in such a way that we see $w(\tau)$ appear under the integral, and then use Gronwall's inequality. However, $w(\tau) = u(\tau) - W(\tau)$, and in the above relation the only term in which u appears is $f(u,\tau) := -ie^{i|D|\tau}(|e^{-i|D|\tau}u|^2 e^{-i|D|\tau}u)$. It is thus natural to decompose the term $f(u,\tau)$ into a part which does not explicitly depend on τ called the resonant part, $f_{\text{res}}(u)$, and a part which depends on τ called the oscillatory part, $f_{\text{osc}}(u,\tau)$. Then, $f_{\text{res}}(u) - \Pi_+(|W|^2W)$ provides us with a term $w = u - W$.

Since we have more information on $W(\tau)$, which can be transformed with a simple change of variables into the solution of the Szegö equation (5.1.4), it may be more convenient to decompose $f(W,\tau) = -ie^{i|D|\tau}(|e^{-i|D|\tau}W|^2 e^{-i|D|\tau}W)$. It turns out that its resonant part is exactly $-i\Pi_+(|W|^2W)$ and thus

$$f(W(\tau),\tau) = -i\Pi_+(|W(\tau)|^2 W(\tau)) + f_{\text{osc}}(W(\tau),\tau).$$

Therefore,

$$w(t) = \varepsilon^2 \int_0^t \Big(f(u(\tau),\tau) - f(W(\tau),\tau) \Big) d\tau + \int_0^t f_{\text{osc}}(W(\tau),\tau) d\tau$$

The first term will indeed yield $w = u - W$, and we are left with estimating the integral of the oscillatory part $f_{\text{osc}}(W(\tau),\tau)$. Since it depends on τ both explicitly and implicitly, it turns out that it can be difficult to estimate its integral. For that reason we consider in the following $F_{\text{osc}}(W(t),t) = \int_0^t f_{\text{osc}}(W(t),\tau)d\tau$, where the integrand depends only explicitly on τ. We construct an ansatz using $F_{\text{osc}}(W,t)$ and we prove that with this ansatz, the error is indeed small.

5.2 First order approximation for the (NLW) equation on $\mathbb{R}$

5.2.1 The renormalization group method at order one

In what follows we describe the RG method of first order in the case of the (NLW) equation on $\mathbb{R}$.

In the (NLW) equation, we make the change of variables $u(t) = \frac{1}{\varepsilon}e^{i|D|t}v(t)$ and set $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon^2$. Then u satisfies the equation :

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\tilde{\varepsilon}e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}u|^2 e^{-i|D|t}u) =: \tilde{\varepsilon} f(u,t) \\ u(0) = \frac{1}{\varepsilon}v_0 =: u_0. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

The starting point of the RG method is the naive perturbation expansion

$$u(t) = u^{(0)}(t) + \tilde{\varepsilon} u^{(1)}(t) + \tilde{\varepsilon}^2 u^{(2)}(t) + \dots$$

Taylor-expanding $f(u,t)$ around $u^{(0)}$, we obtain

$$f(u,t) = f(u^{(0)},t) + f'(u^{(0)},t)(u(t) - u^{(0)}(t)) + \dots = f(u^{(0)},t) + \tilde{\varepsilon} f'(u^{(0)},t) u^{(1)}(t) + \dots$$

Plugging the last two expansions into the equation (5.2.1) and identifying the coefficients according to the powers of $\tilde{\varepsilon}$, we obtain :

$$\begin{cases} \partial_t u^{(0)} = 0 \\ \partial_t u^{(1)} = f(u^{(0)}, t) \\ \partial_t u^{(2)} = f'(u^{(0)}, t) \cdot u^{(1)}(t) \\ \dots \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Therefore, $u^{(0)}(t) = u_0$ for all $t \in \mathbb{R}$, and using Duhamel's formula we have

$$u^{(1)}(t) = \int_0^t f(u_0, s) ds.$$

Here we assumed that $u^{(1)}(0) = 0$. As it was shown in [93], this assumption does not cause a loss of generality for an approximation of order $\tilde{\varepsilon}$. Thus, if we look for an approximation of the solution up to order $O(\tilde{\varepsilon})$ and neglect any terms $O(\tilde{\varepsilon}^2)$, we have

$$u(t) = u_0 + \tilde{\varepsilon} u^{(1)}(t) + O(\tilde{\varepsilon}^2) = u_0 + \tilde{\varepsilon} \int_0^t f(u_0, s) ds + O(\tilde{\varepsilon}^2). \tag{5.2.3}$$

Now we decompose the nonlinearity $f(u,t)$ into its resonant and non-resonant part. In order to do that, we first write the nonlinearity in the Fourier space :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big(f(u,s)\big)(\xi) = -ie^{i|\xi|s} \mathcal{F}\big(|e^{-i|D|s}u|^2 e^{-i|D|s}u\big)(\xi) \\ &= -\, ie^{i|\xi|s} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\big((e^{-i|D|s}u)^2\big)(\eta) \mathcal{F}\big(\overline{e^{-i|D|s}u}\big)(\xi - \eta) d\eta \\ &= -\, ie^{i|\xi|s} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\big(e^{-i|D|s}u\big)(\eta - \zeta) \mathcal{F}\big(e^{-i|D|s}u\big)(\zeta) \mathcal{F}\big(\overline{e^{-i|D|s}u}\big)\big)(\xi - \eta) d\zeta d\eta \\ &= -\, i \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{is(|\xi| - |\zeta| + |\eta - \xi| - |\eta - \zeta|)} \hat{u}(\eta - \zeta) \hat{u}(\zeta) \overline{\hat{u}}(\eta - \xi) d\zeta d\eta. \end{aligned}$$

Setting $\phi(\xi, \eta, \zeta) := |\xi| - |\zeta| + |\eta - \xi| - |\eta - \zeta|$, we can write

$$f(u,s) = f_{\text{res}}(u) + f_{\text{osc}}(u,s), \tag{5.2.4}$$

where

$$f_{\text{res}}(u) = -i\mathcal{F}^{-1}\int\int_{\phi=0} \hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta, \tag{5.2.5}$$

$$f_{\text{osc}}(u,s) = -i\mathcal{F}^{-1}\int\int_{\phi\neq 0} e^{is(|\xi|-|\zeta|+|\eta-\xi|-|\eta-\zeta|)}\hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)d\zeta d\eta.$$

As it will be proved in Lemma 5.2.1 in the next section, for fixed ξ, the set $\{\phi(\xi,\eta,\zeta)=0\}\subset\mathbb{R}^2$ has non-zero Lebesgue measure, and thus it makes sense to integrate on this set. More precisely, $\{\phi(\xi,\eta,\zeta)=0\}$ is the set of $(\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^2$ such that $\zeta,\eta-\xi,\eta-\zeta$ have the same sign as ξ, or $\zeta=\xi$, or $\eta-\zeta=\xi$.

Plugging the decomposition (5.2.4) into the equation (5.2.3), we obtain

$$u(t) = u_0 + \tilde{\varepsilon}tf_{\text{res}}(u_0) + \tilde{\varepsilon}\int_0^t f_{\text{osc}}(u_0,s)ds + O(\tilde{\varepsilon}^2).$$

We notice that the resonant part of the non-linearity, which is constant in time, causes the appearance of the secular term $\tilde{\varepsilon}tf_{\text{res}}(u_0)$. This term will grow with time and will cause the approximation to break down as time approaches $\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$. The purpose of the renormalization group method consists in renormalizing the secular term. By doing that, its main contribution is taken into account in such a way that the approximation of u stays valid at least up to a time of order $\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$. The idea behind the renormalization group method is to regard the term $u_0+\tilde{\varepsilon}tf_{\text{res}}(u_0)$ as being the Taylor expansion of order one of a function $W(t)$ around $t=0$. Then, one introduces the renormalization group equation :

$$\begin{cases}\partial_t W = \tilde{\varepsilon}f_{\text{res}}(W)\\ W(0)=u_0\end{cases} \tag{5.2.6}$$

An approximation of order $O(\tilde{\varepsilon})$ of $u(t)$ is then

$$u(t) = W(t) + \tilde{\varepsilon}F_{\text{osc}}(W(t),t),$$

where we set $F_{\text{osc}}(h,t) := \int_0^t f_{\text{osc}}(h,s)ds$ for all $h\in H_+^{\frac{1}{2}}$.

5.2.2 Approximate solution for the (NLW) equation on $\mathbb{R}$

In this section we construct an approximate solution based on the solution of the RG equation. We first determine the resonant part of the non-linearity f_{res}. For that purpose we fix $\xi\in\mathbb{R}$, and determine the area in the (ζ,η)-plane in which $\phi(\xi,\eta,\zeta)$ vanishes.

Let us first make the following notations :

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \zeta, \quad \xi_3 = \eta - \xi, \quad \xi_4 = \eta - \zeta.$$

Notice that $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$. Then, $\phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ is equivalent to $|\xi_1| - |\xi_2| + |\xi_3| - |\xi_4| = 0$. We have the following lemma, whose proof follows its analogue in the case of $\mathbb{T}$ [37].

Lemma 5.2.1. *The set of* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4$ *such that* $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$ *and* $|\xi_1| - |\xi_2| + |\xi_3| - |\xi_4| = 0$*, is*

$$\begin{aligned} M :=& \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4, \xi_1 \neq \xi_2, \xi_1 \neq \xi_4 \Big| \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \geq 0\} \\ &\cup \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4, \xi_1 \neq \xi_2, \xi_1 \neq \xi_4 \Big| \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \leq 0\} \\ &\cup \{(\xi_1, \xi_1, \xi_3, \xi_3) \in \mathbb{R}^4\} \cup \{(\xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_1) \in \mathbb{R}^4\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Suppose $\xi_1 \neq \xi_2$ and $\xi_1 \neq \xi_4$. Without loss of generality, we can assume that one of the four elements is strictly positive. Otherwise, all are smaller or equal to zero. Suppose $\xi_1 > 0$. Subtracting the two relations in the hypothesis we obtain

$$|\xi_3| - \xi_3 = |\xi_2| - \xi_2 + |\xi_4| - \xi_4.$$

Then, if $\xi_3 \geq 0$, this yields $\xi_2, \xi_4 \geq 0$. If $\xi_3 < 0$, at least one of ξ_2 or ξ_4 is negative. If both are negative, then we obtain $\xi_3 = \xi_2 + \xi_4$, and thus $\xi_1 = 0$, which is a contradiction. If $\xi_2 < 0$ and $\xi_4 \geq 0$, we have $\xi_3 = \xi_2$, and consequently $\xi_1 = \xi_4$, which contradicts our assumption. Similarly, if $\xi_4 < 0$ and $\xi_2 \geq 0$, we obtain the contradiction $\xi_1 = \xi_2$.

Thus, the set of $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4$ such that $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$ and $|\xi_1| - |\xi_2| + |\xi_3| - |\xi_4| = 0$ is M. □

Coming back to the notations in ξ, η, and ζ, we have that $\phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ in the following cases :

If $\xi > 0$ and $(\eta, \zeta) \in \{(\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^2 | \eta \geq \xi, \eta \geq \zeta \geq 0\} \cup \{\zeta = \xi\} \cup \{\eta - \zeta = \xi\}$

If $\xi < 0$ and $(\eta, \zeta) \in \{(\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^2 | \eta \leq \xi, \eta \leq \zeta \leq 0\} \cup \{\zeta = \xi\} \cup \{\eta - \zeta = \xi\}$

Since, for fixed $\xi \in \mathbb{R}$, the sets $\{\zeta = \xi\}$ and $\{\eta - \zeta = \xi\}$ are of measure zero in the (ζ, η)-plane, they do not interfere in the integration in equation (5.2.5), and thus we can neglect them. We are therefore left with the following two terms of $\mathcal{F}\big(f_{\text{res}}(u)\big)$:

1. The case $\xi > 0$, $\zeta \geq 0$, $\eta - \zeta \geq 0$, $\eta - \xi \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&- i\mathbf{1}_{\xi>0} \int\int \hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)\mathbf{1}_{\zeta\geq 0}\mathbf{1}_{\eta-\zeta\geq 0}\mathbf{1}_{\eta-\xi\geq 0}d\zeta d\eta \\
&= -i\mathbf{1}_{\xi>0} \int\int \hat{u}_+(\eta-\zeta)\hat{u}_+(\zeta)\overline{\hat{u}}_+(\eta-\xi)d\zeta d\eta = -i\mathcal{F}\big(\Pi_+(|u_+|^2u_+)\big)(\xi)\mathbf{1}_{\xi>0}.
\end{aligned}$$

2. The case $\xi < 0$, $\zeta < 0$, $\eta - \zeta < 0$, $\eta - \xi < 0$:

$$\begin{aligned}
&- i\mathbf{1}_{\xi<0} \int\int \hat{u}(\eta-\zeta)\hat{u}(\zeta)\overline{\hat{u}}(\eta-\xi)\mathbf{1}_{\zeta<0}\mathbf{1}_{\eta-\zeta<0}\mathbf{1}_{\eta-\xi<0}d\zeta d\eta \\
&= -\mathbf{1}_{\xi<0}i \int\int \hat{u}_-(\eta-\zeta)\hat{u}_-(\zeta)\overline{\hat{u}}_-(\eta-\xi)d\zeta d\eta = -i\mathcal{F}\big(\Pi_-(|u_-|^2u_-)\big)(\xi)\mathbf{1}_{\xi<0}.
\end{aligned}$$

Thus, the resonant part of the nonlinearity is

$$f_{\text{res}}(u) = -i\Big(\Pi_+(|u_+|^2u_+) + \Pi_-(|u_-|^2u_-)\Big) \tag{5.2.7}$$

Let $W_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$, $s > 1/2$. We consider the renormalization group equation :

$$\begin{cases} \partial_t W = \varepsilon^2 f_{\text{res}}(W) \\ W(0) = W_0 \end{cases} \tag{5.2.8}$$

Projecting onto non-negative and negative frequencies, we obtain two equations, one for $W_+ := \Pi_+(W)$ and one for $W_- := \Pi_-(W)$. Notice first that, since $W_0 \in H^s_+(\mathbb{R})$, we have that $W_{0,-} = 0$ and $W_{0,+} = W_0$. Then, the equations we obtain are :

$$\begin{cases} i\partial_t W_+ = \varepsilon^2\Pi_+(|W_+|^2W_+) \\ W_+(0) = W_0 \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} i\partial_t W_- = \varepsilon^2\Pi_-(|W_-|^2W_-) \\ W_-(0) = 0. \end{cases}$$

By the Cauchy-Lipschitz theorem, we have that $W_-(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$, and thus $W = W_+$. We construct an approximate solution by

$$u_{\text{app}}(t) = W(t) + \varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(t), t). \tag{5.2.9}$$

Then, u_{app} satisfies the equation

$$\begin{cases}\partial_t u_{\mathrm{app}} = \varepsilon^2 f(W(t),t) + \varepsilon^4 D_W F_{\mathrm{osc}}(W(t),t)\cdot f_{\mathrm{res}}(W(t)) \\ u_{\mathrm{app}} = W_0.\end{cases} \tag{5.2.10}$$

By the Duhamel formula, we obtain that

$$u_{\mathrm{app}}(t) = W_0 + \varepsilon^2 \int_0^t f(u_{\mathrm{app}}(s))ds + \int_0^t R_\varepsilon(s,W(s))ds, \tag{5.2.11}$$

where

$$R_\varepsilon(W(t),t) = \varepsilon^2\Big(f(W(t)) - f(u_{\mathrm{app}}(t))\Big) + \varepsilon^4 D_W F_{\mathrm{osc}}(W(t),t)\cdot f_{\mathrm{res}}(W(t)).$$

5.2.3 Estimates for the oscillatory part of the nonlinearity in the case of $\mathbb{R}$

Lemma 5.2.2. *Let $s \geq 1$. Let $W \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{R}))$ be such that $\mathcal{W} = \varepsilon W$ is the solution of the Szegö equation* (5.1.8) *with initial data $\mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0$. Then, we have that*

$$\|F_{\mathrm{osc}}(W,t)\|_{H^s} \leq C_* t^{1/2} + C\|W\|^3_{H^s},$$
$$\|D_W F_{\mathrm{osc}}(W(t),t)\cdot f_{\mathrm{res}}(W(t))\|_{H^s} \leq C_* t^{1/2} + C\|W\|^5_{H^s},$$

where $C > 0$ is an absolute constant and $C_* > 0$ is a constant depending only on the $H^{1/2}_+(\mathbb{R})$-norm of W_0.

Démonstration. Since $W \in L^2_+(\mathbb{R})$ and using Lemma 5.2.1, we have that

$$\begin{aligned}
&\widehat{f_{\mathrm{osc}}}(W(t),s,\xi) \\
&\quad = -i\int\int_{\phi\neq 0} e^{is\phi(\xi,\eta,\zeta)}\hat{W}(t,\eta-\zeta)\hat{W}(t,\zeta)\overline{\hat{W}}(t,\eta-\xi)\mathbf{1}_{\eta-\zeta\geq 0}\mathbf{1}_{\zeta\geq 0}\mathbf{1}_{\eta-\xi\geq 0}d\eta d\zeta \\
&\quad = -i\mathbf{1}_{\xi<0}\int\int e^{is\phi(\xi,\eta,\zeta)}\hat{W}(t,\eta-\zeta)\hat{W}(t,\zeta)\overline{\hat{W}}(t,\eta-\xi)\mathbf{1}_{\eta\geq\zeta}\mathbf{1}_{\zeta\geq 0}d\eta d\zeta.
\end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}
\widehat{F_{\mathrm{osc}}}(W(t),t,\xi) &= \int_0^t \widehat{f_{\mathrm{osc}}}(W(t),s,\xi)ds \\
&= -i\mathbf{1}_{\xi<0}\int\int \frac{e^{it\phi(\xi,\eta,\zeta)}-1}{i\phi}\hat{W}(t,\eta-\zeta)\hat{W}(t,\zeta)\overline{\hat{W}}(t,\eta-\xi)\mathbf{1}_{\eta\geq\zeta}\mathbf{1}_{\zeta\geq 0}d\eta d\zeta.
\end{aligned}$$

Notice that in the region $\xi < 0$ and $\{(\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^2 | \eta \geq \zeta \geq 0\}$, we have that

$$\phi(\xi,\eta,\zeta) = |\xi| - |\zeta| + |\eta - \xi| - |\eta - \zeta| = -\xi - \zeta + \eta - \xi - \eta + \zeta = -2\xi.$$

Then,

$$\widehat{F_{\text{osc}}}(W(t),t,\xi) = \frac{e^{-2it\xi} - 1}{2\xi} \mathcal{F}(|W|^2 W)(\xi) \mathbf{1}_{\xi<0}. \tag{5.2.12}$$

We now compute the L^2-norm of $F_{\text{osc}}(W(t),t)$, using Parseval's identity :

$$\begin{aligned}
2\pi \|F_{\text{osc}}(W(t),t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{F_{\text{osc}}}(W(t),t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2} \left|\mathcal{F}(|W|^2 W)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \left\|\mathcal{F}(|W|^2 W)\right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2} d\xi \\
&\leq \||W|^2 W\|^2_{L^1(\mathbb{R})} t \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \\
&\leq Ct \|W\|^6_{L^3(\mathbb{R})} \leq Ct \|W(t)\|^6_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})} \leq Ct \|W_0\|^6_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

The last inequality is due to the conservation of the $H^{1/2}_+$-norm by the flow of the Szegö equation. Therefore,

$$\|F_{\text{osc}}(W(t),t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_* t^{1/2} \text{ for all } t \in \mathbb{R}.$$

Let us now estimate the $\dot{H}^s$-norm of $F_{\text{osc}}(W(t),t)$ for $s \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\|F_{\text{osc}}(W(t),t)\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{0} \xi^{2s} \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2} \left|\mathcal{F}(|W|^2 W)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \xi^{2(s-1)} \left|\mathcal{F}(|W|^2 W)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \||W|^2 W\|^2_{\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq \||W|^2 W\|^2_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|W\|^6_{H^s(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\|F_{\text{osc}}(W(t),t)\|^2_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_*(t^{1/2} + \|W\|^3_{H^s(\mathbb{R})}).$$

We proceed similarly for $D_W F_{\text{osc}}(W(t),t) \cdot f_{\text{res}}(W)$. First, we notice that

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\big(D_W F_{\text{osc}}(W,t) \cdot f_{\text{res}}(W)\big)(\xi) =& 2\frac{e^{-2it\xi} - 1}{2\xi} \mathcal{F}(|W|^2 f_{\text{res}}(W))(\xi) \mathbf{1}_{\xi<0} \\
&+ \frac{e^{-2it\xi} - 1}{2\xi} \mathcal{F}(W^2 \overline{f_{\text{res}}(W)})(\xi) \mathbf{1}_{\xi<0}.
\end{aligned}$$

We use in what follows the fact that $f_{\text{res}}(W) = \Pi_+(|W|^2W)$, which is a consequence of equation (5.2.7) and of $W \in L^2_+(\mathbb{R})$. We estimate the L^2-norm, using Parseval's identity :

$$\begin{aligned}
2\pi\|D_W F_{\text{osc}}(W,t)\cdot f_{\text{res}}(W)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}\big(D_W F_{\text{osc}}(W,t)\cdot f_{\text{res}}(W)\big)(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq C\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2}\big|\mathcal{F}(|W|^2 f_{\text{res}}(W)(\xi)\big|^2 d\xi \\
&+ C\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2}\big|\mathcal{F}(W^2\overline{f_{\text{res}}(W)}(\xi)\big|^2 d\xi \\
&\leq C\Big(\big\|\mathcal{F}(|W|^2 f_{\text{res}}(W)\big\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} + \big\|\mathcal{F}(W^2\overline{f_{\text{res}}(W)})\big\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big)\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2(t\xi)}{\xi^2}d\xi \\
&\leq C\big(\||W|^2 f_{\text{res}}(W)\|^2_{L^1(\mathbb{R})} + \|W^2\overline{f_{\text{res}}(W)}\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\big)t\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \\
&\leq Ct\|W\|^4_{L^4(\mathbb{R})}\|f_{\text{res}}(W)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ct\|W\|^4_{L^4(\mathbb{R})}\|\Pi_+(|W|^2W)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq Ct\|W\|^4_{L^4(\mathbb{R})}\|W\|^6_{L^6(\mathbb{R})} \leq Ct\|W(t)\|^{10}_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})} \leq C\|W_0\|^{10}_{H^{1/2}_+(\mathbb{R})}t \leq C_*t.
\end{aligned}$$

Then, proceeding as in the case of $F_{\text{osc}}(W)$ and using the structure of an algebra of H^s, $s \geq 1$, we have that

$$\begin{aligned}
\|D_W F_{\text{osc}}(W,t)\cdot f_{\text{res}}(W)\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} &\leq C\||W|^2 f_{\text{res}}(W)\|^2_{\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R})} + C\|W^2\overline{f_{\text{res}}(W)}\|^2_{\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R})} \\
&\leq C\|W\|^4_{H^s(\mathbb{R})}\|f_{\text{res}}(W)\|^2_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq C\|W\|^4_{H^s(\mathbb{R})}\||W|^2W\|^2_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|W\|^{10}_{H^s(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Therefore, for $s \geq 1$ we have

$$\|D_W F_{\text{osc}}(W,t)\cdot f_{\text{res}}(W)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_*(t^{1/2} + \|W\|^5_{H^s(\mathbb{R})}).$$

□

5.2.4 Proof of Theorem 5.1.3

Proof of Theorem 5.1.3. Let v be the solution of equation (5.1.7). With the change of variables $u(t) = \frac{1}{\varepsilon}e^{i|D|t}v(t)$, we have that u satisfies the equation (5.1.10). By the Duhamel formula, it follows that

$$u(t) = W_0 + \varepsilon^2\int_0^t f(u(s),s)ds, \tag{5.2.13}$$

Set $w(t) := u(t) - u_{\text{app}}(t)$, where u_{app} is defined by (5.2.9). By equations (5.2.13) and

(5.2.11), we have that

$$
\begin{aligned}
w(t) =&\varepsilon^2 \int_0^t \big(f(u(s),s) - f(u_{\text{app}}(s),s)\big)ds - \int_0^t R_\varepsilon(W(s),s)ds \\
=&\varepsilon^2 \int_0^t \big(f(u(s),s) - f(u_{\text{app}}(s),s)\big)ds - \varepsilon^2 \int_0^t \Big(f(W(s),s) - f(u_{\text{app}}(s),s)\Big)ds \\
&- \varepsilon^4 \int_0^t D_W F_{\text{osc}}(W(s),s) \cdot f_{\text{res}}(W(s))ds = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.
\end{aligned}
$$

Here W denotes the solution of the renormalization group equation (5.1.11). In what follows, we estimate each of the terms I,II,III in the H^s-norm, $s > 1/2$. Using the definition of u_{app} (5.2.9), and the estimates in Lemma 5.2.2, it follows that

$$
\|u_{\text{app}}(t)\|_{H^s} \leq \|W\|_{H^s} + \varepsilon^2 \|F_{\text{osc}(W,t)}\|_{H^s} \leq \|W\|_{H^s} + \varepsilon^2 C_* t^{1/2} + \varepsilon^2 C \|W\|_{H^s}^3.
$$

Then, we have

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{I}\|_{H^s} &\leq \varepsilon^2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s} \big(\|u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|u_{\text{app}}(\tau)\|_{H^s}^2\big) d\tau \\
&\leq C\varepsilon^2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s} \big(\|w(\tau)\|_{H^s}^2 + \|u_{\text{app}}(\tau)\|_{H^s}^2\big) d\tau \\
&\leq C\varepsilon^2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s} \big(\|w(\tau)\|_{H^s}^2 + \|W\|_{H^s}^2 + \varepsilon^4 C_* t + \varepsilon^4 C \|W\|_{H^s}^6\big) d\tau.
\end{aligned}
$$

Using $W(s) - u_{\text{app}}(s) = -\varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(s),s)$, and proceeding as above, we obtain

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{II}\|_{H^s} &\leq \varepsilon^4 t \|F_{\text{osc}}(t, W(t))\|_{L^\infty([0,t],H^s)} \big(\|W\|_{L^\infty([0,t],H^s)}^2 + \|u_{\text{app}}\|_{L^\infty([0,t],H^s)}^2\big) \\
&\leq C_* \varepsilon^4 t (t^{1/2} + \|W\|_{L^\infty([0,t],H^s)}^3)(\|W\|_{L^\infty([0,t],H^s)}^2 + \varepsilon^4 t + \varepsilon^4 \|W\|_{L^\infty([0,t],H^s)}^6).
\end{aligned}
$$

and

$$
\|\mathrm{III}\|_{H^s} \leq C_* \varepsilon^4 t (t^{1/2} + \|W\|_{L^\infty([0,t],H^s)}^5).
$$

In order to estimate w we will use a bootstrap argument. Let $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\delta > 0$ small enough, and set

$$
T := \sup \Big\{ t \geq 0 \Big| \|w(t)\|_{H^s} \leq 1 \Big\}. \tag{5.2.14}
$$

We will prove that $T > \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. Suppose by contradiction that

$$
T \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}. \tag{5.2.15}
$$

According to the hypothesis on $\mathcal{W}$ and since $\mathcal{W} = \varepsilon W$, we have that $\|W(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$ for all $t \in \mathbb{R}$. Using the estimates of I, II, III, we obtain for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$ that

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_{H^s} \leq & C\varepsilon^2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s}(1 + \|W\|_{H^s}^2 + \varepsilon^4 C_* \tau + \varepsilon^4 C \|W\|_{H^s}^6) d\tau \\
& + C_* \varepsilon^4 t (t^{1/2} + \|W\|_{H^s}^3)(\|W\|_{H^s}^2 + \varepsilon^4 t + \varepsilon^4 \|W\|_{H^s}^6) + C_* \varepsilon^4 t (t^{1/2} + \|W\|_{H^s}^5) \\
\leq & C\varepsilon^2 \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha} \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s} d\tau + C_* \varepsilon \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)} \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha} \\
& + C_* \varepsilon \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{3}{2}(1-2\alpha)}.
\end{aligned}$$

By Gronwall's inequality it follows, for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, that

$$\|w(t)\|_{H^s} \leq C_* \varepsilon \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{3}{2}-\alpha} e^{C \log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})} \leq C_* \varepsilon \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{3}{2}-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{C\delta}} \leq C_* \varepsilon^{1-C_0\delta},$$

If δ is sufficiently small, this bound is much better than the one imposed in the definition of T. Since w is continuous with respect to t, it follows that there exists $\gamma > 0$ such that

$$\|w(t)\|_{H^s} \leq 1,$$

for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha} + \gamma$. This contradicts the assumption (5.2.15) we made on T. Therefore, $T > \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$ and, moreover, $\|w(t)\|_{H^s} \leq \varepsilon^{1-C_0\delta}$ for all $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. This yields

$$\|u(t) - W(t) - \varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(t), t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_* \varepsilon^{1-C_0\delta}$$

for all $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. Since by Lemma 5.2.2, we have that

$$\|\varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(t), t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \varepsilon^2 (C_* t^{1/2} + C\|W\|_{H^s}^3) \leq C_* \varepsilon \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{2}(1-2\alpha)} \leq C_* \varepsilon^{1-C_0\delta}$$

for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, we obtain

$$\|u(t) - W(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_* \varepsilon^{1-C_0\delta}.$$

Recalling that $u(t) = \frac{1}{\varepsilon} e^{i|D|t} v(t)$ and $W = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{W}$, we obtain that

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\mathcal{W}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_* \varepsilon^{2-C_0\delta}, \tag{5.2.16}$$

for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. □

5.2.5 Proof of Corollary 5.1.6

Proof of Corollary 5.1.6. Let W be the solution of the equation

$$\begin{cases} i\partial_t W = \varepsilon^2 \Pi_+(|W|^2 W) \\ W(0) = W_0. \end{cases}$$

With the change of variables $W(t,x) = y(\varepsilon^2 t, x)$, we have that y satisfies the Szegö equation :

$$\begin{cases} i\partial_t y = \Pi_+(|y|^2 y) \\ y(0) = W_0. \end{cases}$$

Then, according to Proposition 5.1.5, we have that $\|y(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim t^{2s-1}$, for all $s > \frac{1}{2}$ and for $t > 1$ sufficiently large. Consequently, we have

$$\|W(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim (\varepsilon^2 t)^{2s-1}$$

for $\varepsilon^2 t$ sufficiently large. Suppose $\frac{1}{2\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}} \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}}$. Then,

$$\frac{c}{2^{2s-1}}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{2s-1}{4s-1}} \leq \|W(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{2s-1}{4s-1}}. \tag{5.2.17}$$

Applying Theorem 5.1.3 with $\alpha = \frac{2s-1}{4s-1} \in (0, \frac{1}{2})$, we obtain that

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\varepsilon W(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{2-C_0\delta}, \tag{5.2.18}$$

for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}}$. Then, equations (5.2.17) and (5.2.18) yield

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^s} &\geq \Big| \|\varepsilon W(t)\|_{H^s} - \|v(t) - e^{-i|D|t}\varepsilon W(t)\|_{H^s} \Big| \\ &\geq \frac{c}{2^{2s-1}}\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{2s-1}{4s-1}} - C\varepsilon^{2-C_0\delta} \geq C\varepsilon\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{2s-1}{4s-1}}. \end{aligned}$$

Since $v(0) = \varepsilon W_0$, it follows that, for $\frac{1}{2\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}} \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{1}{4s-1}}$, we have

$$\frac{\|v(t)\|_{H^s}}{\|v(0)\|_{H^s}} \geq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\frac{2s-1}{4s-1}}.$$

□

5.3 First order approximation for the (NLW) equation on $\mathbb{T}$

5.3.1 The renormalization group equation for the case of $\mathbb{T}$

We decompose a 2π-periodic function $a(t)$ in the following way :

$$a(t) = a_{\text{res}} + a_{\text{osc}}(t), \tag{5.3.1}$$

where

$$a_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\tau)d\tau \tag{5.3.2}$$

is the mean of the function $a(t)$ or equivalently, the Fourier coefficient at zero. The oscillatory part is then

$$a_{\text{osc}}(t) = \sum_{k\neq 0} \widehat{a}(k)e^{itk}. \tag{5.3.3}$$

With this decomposition, we notice that for the torus, the resonant and non-resonant part of the nonlinearity are the following :

$$f_{\text{res}}(u,x) = -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ |k|-|l|+|m|-|j|=0}} \hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m),$$

$$f_{\text{osc}}(u,s,x) = -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ |k|-|l|+|m|-|j|\neq 0}} e^{is(|k|-|l|+|m|-|j|)}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m).$$

A slight difference with the case of $\mathbb{R}$ is the definition of $F_{\text{osc}}(u,t)$:

$$F_{\text{osc}}(u,t,x) := -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ |k|-|l|+|m|-|j|\neq 0}} \frac{e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)}}{i(|k|-|l|+|m|-|j|)}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m),$$

whereas for $\mathbb{R}$, we had $F_{\text{osc}}(u,t) = \int_0^t f_{\text{osc}}(u,s)ds$. Notice that in both cases we have that $\frac{\partial F_{\text{osc}}}{\partial t}(u,t,x) = f_{\text{osc}}(u,t,x)$.

As it was shown in [37], the following lemma holds :

Lemma 5.3.1. *We have that* $k-l+m-j=0$ *and* $|k|-|l|+|m|-|j|=0$ *if and only if we are in one of the following cases :*

(i) *If* $k>0$ *and* $\{l,m,j\geq 0\}\cup\{k=l\}\cup\{k=j\}$

(ii) *If* $k=0$ *and* $\{l,m,j\geq 0\}\cup\{l,m,j\leq 0\}$

(iii) *If* $k<0$ *and* $\{l,m,j\leq 0\}\cup\{k=l\}\cup\{k=j\}$.

We decompose the region where $k-l+m-j=0$ and $|k|-|l|+|m|-|j|=0$ into disjoint sub-regions, and we compute the Fourier transform of the resonant part $f_{\text{res}}(u)$. We obtain the following twelve terms :

1. The case $k,l,m,j\geq 0$:
$$-i\sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ k,l,m,j\geq 0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) = -i\mathcal{F}\big(\Pi_+(|u_+|^2u_+)\big)(k)\mathbf{1}_{k\geq 0}.$$

2. The case $k\geq 0$, $k=l$, $m=j<0$:
$$-i\sum_{\substack{l=k\geq 0\\ m=j<0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) = -i\hat{u}(k)\mathbf{1}_{k\geq 0}\sum_{j=-\infty}^{-1}|\hat{u}(j)|^2 = -i\|u_-\|_{L^2}^2\hat{u}_+(k)\mathbf{1}_{k\geq 0}.$$

3. The case $k\geq 0$, $k=j$, $m=l<0$. We obtain as above $-i\|u_-\|_{L^2}^2\hat{u}_+(k)\mathbf{1}_{k\geq 0}$.

4. The case $k=0$ and $l,m,j<0$:
$$-i\sum_{\substack{-l+m-j=0\\ l,m,j<0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) = -i\mathcal{F}\big(|u_-|^2u_-\big)(0).$$

5. The case $k,l,m,j<0$:
$$-i\sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ k,l,m,j<0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) = -i\mathcal{F}\big(\Pi_-(|u_-|^2u_-)\big)(k)\mathbf{1}_{k<0}.$$

6. The case $k<0$, $l=0$, $j<0$, $m<0$:
$$\begin{aligned}-i\sum_{\substack{k+m-j=0,l=0,\\ k,m,j<0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) &= -i\hat{u}(0)\mathbf{1}_{k<0}\sum_{j=k-1}^{-1}\hat{u}(j)\overline{\hat{u}}(j-k)\\ &= -i\hat{u}(0)\mathcal{F}\big(\Pi_-|u_-|^2)\big)(k)\mathbf{1}_{k<0}.\end{aligned}$$

7. The case $k<0$, $j=0$, $l<0$, $m<0$. We obtain as above $-i\hat{u}(0)\mathcal{F}\big(\Pi_-|u_-|^2)\big)(k)\mathbf{1}_{k<0}$.

8. The case $k<0$, $m=0$, $l<0$, $j<0$:

$$\begin{aligned}-i\sum_{\substack{k-l-j=0,m=0,\\ k,l,j<0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) &= -i\overline{\hat{u}}(0)\mathbf{1}_{k<0}\sum_{j=k-1}^{-1}\hat{u}(j)\hat{u}(k-j)\\ &= -i\overline{\hat{u}}(0)\mathcal{F}\big(u_-^2\big)(k)\mathbf{1}_{k<0}.\end{aligned}$$

9. The case $k<0$, $k=l$, $m=j\geq 0$:

$$-\,i\sum_{\substack{k=l<0,\\ m=j\geq 0}}\hat{u}(j)\hat{u}(l)\overline{\hat{u}}(m) = -i\hat{u}(k)\mathbf{1}_{k<0}\sum_{j=0}^{\infty}|\hat{u}(j)|^2 = -i\|u_+\|_{L^2}^2\hat{u}_-(k)\mathbf{1}_{k<0}.$$

10. The case $k<0$, $k=j$, $l=m\geq 0$. We obtain as above $-i\|u_+\|_{L^2}^2\hat{u}_-(k)\mathbf{1}_{k<0}$.

Thus, the resonant part of the nonlinearity is

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{res}}(u,x) = &-i\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}\Big(\Pi_+(|u_+|^2u_+)\Big)(k)e^{ikx} - 2i\|u_-\|_{L^2}^2\sum_{k=0}^{\infty}\hat{u}_+(k)e^{ikx}\\ &- i\mathcal{F}\big(|u_-|^2u_-\big)(0) - i\sum_{k=-\infty}^{-1}\mathcal{F}\Big(\Pi_-(|u_-|^2u_-)\Big)(k)e^{ikx}\\ &- 2i\hat{u}(0)\sum_{k=-\infty}^{-1}\mathcal{F}\big(\Pi_-(|u_-|^2)\big)(k)e^{ikx}\\ &- i\overline{\hat{u}}(0)\sum_{k=-\infty}^{-1}\mathcal{F}(u_-^2)(k)e^{ikx} - 2i\|u_+\|_{L^2}^2\sum_{k=-\infty}^{-1}\hat{u}_-(k)e^{ikx}\end{aligned}$$

or equivalently,

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{res}}(u,x) = &-i\Pi_+(|u_+|^2u_+) - 2i\|u_-\|_{L^2}^2u_+ - i\mathcal{F}\big(|u_-|^2u_-\big)(0)\\ &- i\Pi_-(|u_-|^2u_-) - 2i\hat{u}(0)\Pi_-(|u_-|^2) - i\overline{\hat{u}}(0)u_-^2 - 2i\|u_+\|_{L^2}^2u_-.\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Lemma 5.3.2. *Let $s>\frac{1}{2}$ and $W_0\in H_+^s(\mathbb{T})$. We consider the renormalization group equation :*

$$\begin{cases}\partial_t u = \varepsilon^2 f_{\mathrm{res}}(u)\\ u(0)=W_0\end{cases} \tag{5.3.5}$$

This equation has a unique global solution in $H^s(\mathbb{T})$ *which coincides with* $W \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{T}))$*, the solution of the following equation*

$$\begin{cases} i\partial_t W = \varepsilon^2 \Pi_+(|W|^2 W) \\ W(0) = W_0 \end{cases} \tag{5.3.6}$$

In particular, $u_-(t) = 0$ *for all* $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. We first notice that $f_{\text{res}} : H^s(\mathbb{T}) \to H^s(\mathbb{T})$, $s > \frac{1}{2}$, defined in equation (5.3.4) is a locally Lipschitz mapping. Indeed, one can prove using the structure of algebra of $H^s(\mathbb{T})$, that

$$\|f_{\text{res}}(u) - f_{\text{res}}(v)\|_{H^s} \leq \|u - v\|_{H^s}(\|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^s}^2),$$

for all $u, v \in H^s(\mathbb{T})$. Then, by the Cauchy-Lipschitz theorem it follows that equation (5.3.5) has an unique solution in $H^s(\mathbb{T})$.

With the change of variables $W(t,x) = y(\varepsilon^2 t, x)$, we obtain from equation (5.3.6) that y satisfies the Szegö equation (5.1.4). The Szegö equation has a unique global solution supported on non-negative frequencies. Thus W is unique and satisfies $W_-(t) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. The only term in the expression of $f_{\text{res}}(u)$ (5.3.4), which does not contain u_- is $-i\Pi(|u_+|^2 u_+)$. Therefore we immediately notice that the solution of the equation (5.3.6) is also the solution of the equation (5.3.5). □

5.3.2 Estimates for the oscillatory part of the nonlinearity in the case of $\mathbb{T}$

To re-prove Theorem 5.1.2 we apply exactly the same method used in the proof of Theorem 5.1.3. The only change that appears is in the estimate of $F_{\text{osc}}(W(t), t)$. We show that in the case of the torus, we obtain a better estimate than in the case of the real line.

Lemma 5.3.3. *Let* $s > \frac{1}{2}$*. For all* $W \in H_+^s(\mathbb{T})$*, we have that*

$$\begin{aligned} \|F_{\text{osc}}(W,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} &\leq C_s \|W\|_{H^s(\mathbb{T})}^3, \\ \|D_W F_{\text{osc}}(W,t) \cdot f_{\text{res}}(W)\|_{H^s(\mathbb{T})} &\leq C_s \|W\|_{H^s(\mathbb{T})}^5, \end{aligned}$$

where C_s *is a constant depending only on* s.

Démonstration. The Fourier coefficients of $F_{\text{osc}}(W,t)$ are :

$$\mathcal{F}(F_{\text{osc}})(W,t,k) = - \sum_{\substack{k-l+m-j=0, \\ |k|-|l|+|m|-|j| \neq 0}} \frac{e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)}}{i(|k|-|l|+|m|-|j|)} \hat{W}(j)\hat{W}(l)\overline{\hat{W}}(m).$$

Setting $\hat{W}_k := \hat{W}(k)$ for all $k \in \mathbb{Z}$, and using the convexity of the function $|x|^\alpha$ if $\alpha > 1$, we have that

$$
\begin{aligned}
&\|F_{\text{osc}}(W,t)\|^2_{H^s(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\Big| \sum_{\substack{k-l+m-j=0,\\ |k|-|l|+|m|-|j|\neq 0}} \frac{e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)}}{|k|-|l|+|m|-|j|}\hat{W}_j\hat{W}_l\overline{\hat{W}}_m\Big|^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\Big(\sum_{k=l-m+j}|\hat{W}_j\hat{W}_l\overline{\hat{W}}_m|\Big)^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\sum_{k=l-m+j}|\hat{W}_j\hat{W}_l\overline{\hat{W}}_m|\sum_{k=\tilde{l}-\tilde{m}+\tilde{j}}|\hat{W}_{\tilde{j}}\hat{W}_{\tilde{l}}\overline{\hat{W}}_{\tilde{m}}| \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)^s\sum_{\substack{k=l-m+j,\\ k=\tilde{l}-\tilde{m}+\tilde{j}}}|\hat{W}_j\hat{W}_l\overline{\hat{W}}_m\hat{W}_{\tilde{j}}\hat{W}_{\tilde{l}}\overline{\hat{W}}_{\tilde{m}}| \\
&= \sum_{l-\tilde{l}-m+\tilde{m}+j-\tilde{j}=0}(1+|l-m+j|^2)^{s/2}(1+|\tilde{l}-\tilde{m}+\tilde{j}|^2)^{s/2}|\hat{W}_j||\hat{W}_l||\hat{W}_m||\hat{W}_{\tilde{j}}||\hat{W}_{\tilde{l}}||\hat{W}_{\tilde{m}}| \\
&\leq \sum_{l-\tilde{l}-m+\tilde{m}+j-\tilde{j}=0}(1+3(|l|^2+|m|^2+|j|^2))^{s/2}(1+3(|\tilde{l}|^2+|\tilde{m}|^2+|\tilde{j}|^2))^{s/2} \\
&\qquad\times|\hat{W}_j||\hat{W}_l||\hat{W}_m||\hat{W}_{\tilde{j}}||\hat{W}_{\tilde{l}}||\hat{W}_{\tilde{m}}| \\
&\leq 9\sum_{l-\tilde{l}-m+\tilde{m}+j-\tilde{j}=0}[(1+|l|^2)+(1+|m|^2)+(1+|j|^2)]^{s/2} \\
&\qquad\times[(1+|\tilde{l}|^2)+(1+|\tilde{m}|^2)+(1+|\tilde{j}|^2)]^{s/2}|\hat{W}_j||\hat{W}_l||\hat{W}_m||\hat{W}_{\tilde{j}}||\hat{W}_{\tilde{l}}||\hat{W}_{\tilde{m}}| \\
&\leq C_s\sum_{l-\tilde{l}-m+\tilde{m}+j-\tilde{j}=0}[(1+|l|^2)^{s/2}+(1+|m|^2)^{s/2}+(1+|j|^2)^{s/2}] \\
&\qquad\times[(1+|\tilde{l}|^2)^{s/2}+(1+|\tilde{m}|^2)^{s/2}+(1+|\tilde{j}|^2)^{s/2}]|\hat{W}_j||\hat{W}_l||\hat{W}_m||\hat{W}_{\tilde{j}}||\hat{W}_{\tilde{l}}||\hat{W}_{\tilde{m}}| \\
&\leq C_s\sum_{l-\tilde{l}-m+\tilde{m}+j-\tilde{j}=0}(1+|j|^2)^{s/2}|\hat{W}_j||\hat{W}_l||\hat{W}_m|(1+|\tilde{j}|^2)^{s/2}|\hat{W}_{\tilde{j}}||\hat{W}_{\tilde{l}}||\hat{W}_{\tilde{m}}| + \text{ similar terms}
\end{aligned}
$$

We consider the functions $V^* = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{ixj}\hat{V}^*_j$ and $U^* = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{ixj}\hat{U}^*_j$, where

$$
\begin{aligned}
\hat{V}^*_j &:= |\hat{W}_j| \\
\hat{U}^*_j &:= (1+|j|^2)^{s/2}|\hat{W}_j|.
\end{aligned}
$$

Ignoring the other terms in the above sum, which can be treated in a similar manner as the term we keep, and using the Sobolev embedding $H^s(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$ if $s > 1/2$, we obtain

$$\begin{aligned}\|F_{\text{osc}}(W(t),t)\|^2_{H^s(\mathbb{T})} &\le C_s \sum_{l-\tilde{l}-m+\tilde{m}+j-\tilde{j}=0} \hat{U}^*_j \hat{V}^*_l \hat{V}^*_m \hat{U}^*_{\tilde{j}} \hat{V}^*_{\tilde{l}} \hat{V}^*_{\tilde{m}} \le C_s \int_{\mathbb{T}} U^* \overline{U^*} (V^*)^2 (\overline{V^*})^2 dz \\ &\le C_s \int_{\mathbb{T}} |U^*|^2 |V^*|^4 dz \le C_s \|U^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \|V^*\|^4_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &\le C_s \|U^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \|V^*\|^4_{H^s(\mathbb{T})} \le C_s \|V^*\|^2_{H^s(\mathbb{T})} \|V^*\|^4_{H^s(\mathbb{T})} \le C_s \|W\|^6_{H^s(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

where C_s denotes a constant depending on s.

The second estimate in the statement,

$$\|D_W F_{\text{osc}}(W,t) \cdot f_{\text{res}}(W)\|_{H^s(\mathbb{T})} \le C_s \|W\|^5_{H^s(\mathbb{T})},$$

can be proved similarly. $\square$

5.3.3 Proof of Theorem 5.1.2

By the hypothesis we have that $\|W(t)\|_{H^s} \le C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$. Using the definition of u_{app} (5.2.9), and Lemma 5.3.3, we obtain that $\|u_{\text{app}}(t)\|_{H^s} \le C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$. Proceeding as in the proof of Theorem 5.1.3, we obtain for $0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})^{1-2\alpha}$

$$\|w(t)\|_{H^s} \le C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha} \varepsilon^2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s} d\tau + C\varepsilon^4 \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{5\alpha} t.$$

This yields, by Gronwall's inequality, for $0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, that

$$\|w(t)\|_{H^s} \le C\varepsilon^4 \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{5\alpha} t e^{C\varepsilon^2 \left(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\right)^{2\alpha} t} \le \varepsilon^{2-C_0\delta},$$

where $C_0 > 0$. Since $w(t) = u(t) - W(t) - \varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W(t),t)$ and $\|F_{\text{osc}}(W(t),t)\|_{H^s} \le C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{3\alpha}$, it follows that

$$\|u(t) - W(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \le C\varepsilon^{2-C_0\delta} \text{ if } 0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}.$$

Then, the changes of variables $v(t) = \varepsilon e^{i|D|t} u(t)$ and $\mathcal{W} = \varepsilon W$ yield the conclusion

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\mathcal{W}(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \le C\varepsilon^{3-C_0\delta} \text{ if } 0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}.$$

5.4 Second order approximation for the (NLW) equation on $\mathbb{T}$

5.4.1 The averaging method at order two

As before, in the (NLW) equation with initial condition $v(0) = \mathcal{W}_0 = \varepsilon W_0$, we make the change of variables $u(t) = \frac{1}{\varepsilon} e^{i|D|t} v(t)$. Then u satisfies the equation :

$$\begin{cases} \partial_t u = -i\varepsilon^2 e^{i|D|t}(|e^{-i|D|t}u|^2 e^{-i|D|t}u) =: f(u,t) \\ u(0) = W_0. \end{cases}$$

The averaging method at order two introduced by Temam and Wirosoetisno in [86], consists in considering the following averaging ansatz :

$$u_{\text{app}}(t) = W(t) + \varepsilon^2 N_1(W,t) + \varepsilon^4 N_2(W,t) =: N(W,t,\varepsilon), \tag{5.4.1}$$

where W is a solution of the following averaged equation :

$$\begin{cases} \partial_t W = \varepsilon^2 R_1(W) + \varepsilon^4 R_2(W) =: R(W,\varepsilon) \\ W(0) = W_0. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

The use of these notations is explained by the fact that R_1, R_2 turn out to be resonant terms, while N_1, N_2 are non-resonant (oscillatory) terms.

A formal computation then shows that

$$\begin{aligned} \partial_t u_{\text{app}}(t) =& \frac{\partial N(W,t,\varepsilon)}{\partial t} = N'(W,t,\varepsilon)\cdot\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}(W,t,\varepsilon) \\ =& (\varepsilon^2 N_1'(W,t) + \varepsilon^4 N_2'(W,t))\cdot(\varepsilon^2 R_1(W) + \varepsilon^4 R_2(W)) + \frac{\partial W}{\partial t} \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial N_1}{\partial t}(W,t) + \varepsilon^4 \frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t) \\ =& \varepsilon^2 \Big(R_1(W) + \frac{\partial N_1}{\partial t}(W,t) \Big) \\ &+ \varepsilon^4 \Big(R_2(W) + N_1'(W,t)\cdot R_1(W) + \frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t) \Big) + O(\varepsilon^6). \end{aligned}$$

We now formally Taylor-expand $f(u_{\text{app}}(t),t)$ around $W(t)$,

$$\begin{aligned} f(u_{\text{app}},t) &= f(W,t) + f'(W,t)\cdot(u_{\text{app}} - W) + O(\varepsilon^4) \\ &= f(W,t) + \varepsilon^2 f'(W,t)\cdot N_1(W,t) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

We replace the two expansions into the equation

$$\partial_t u_{\text{app}} = \varepsilon^2 f(u_{\text{app}}, t) + O(\varepsilon^6)$$

in order to determine R_1, R_2, N_1, N_2 which yield an approximate solution. Identifying the coefficients according to the powers of ε, we obtain the equations

$$R_1(W) + \frac{\partial N_1}{\partial t}(W,t) = f(W,t) \tag{5.4.3}$$

$$R_2(W) + N_1'(W,t) \cdot R_1(W) + \frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t) = f'(W,t) \cdot N_1(W,t) \tag{5.4.4}$$

Thus, R_1 is the part of $f(W,t)$ which does not explicitly depend on t. According to the decomposition given in equations (5.3.1), (5.3.2), and (5.3.3), we have :

$$R_1(W) = f_{\text{res}}(W) \qquad \text{and} \qquad N_1(W,t) = F_{\text{osc}}(W,t).$$

Then, from the second equation we have :

$$\begin{aligned} R_2(W) =& \{f'(W,t) \cdot N_1(W,t)\}_{\text{res}} - \{N_1'(W,t) \cdot R_1(W)\}_{\text{res}} \qquad (5.4.5) \\ \frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t) =& \{f'(W,t) \cdot N_1(W,t)\}_{\text{osc}} - \{N_1'(W,t) \cdot R_1(W)\}_{\text{osc}}. \end{aligned}$$

Replacing R_1, N_1 and noticing that $F_{\text{osc}}'(W,t) \cdot f_{\text{res}}(W)$ does not have a resonant part, we obtain :

$$\begin{aligned} R_2(W) =& \{f'(W,t) \cdot F_{\text{osc}}(W,t)\}_{\text{res}} - \{F_{\text{osc}}'(W,t) \cdot f_{\text{res}}(W)\}_{\text{res}} \qquad (5.4.6) \\ =& \{f'(W,t) \cdot F_{\text{osc}}(W,t)\}_{\text{res}} \\ \frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t) =& \{f'(W,t) \cdot F_{\text{osc}}(W,t)\}_{\text{osc}} - F_{\text{osc}}'(W,t) \cdot f_{\text{res}}(W). \end{aligned}$$

We set $w(t) := u(t) - u_{\text{app}}(t)$. In what follows, we determined a simplified version of the equation satisfied by w. First, by the definition of u_{app} (5.4.1), we have that w satisfies :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon^2 f(u,t) - \frac{\partial W}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial N_1}{\partial t}(W,t) - \varepsilon^2 N_1'(W,t) \cdot \frac{\partial W}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t) - \varepsilon^4 N_2'(W,t) \cdot \frac{\partial W}{\partial t} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

We consider the following Taylor expansion of $f(u)$ around W :

$$\begin{aligned} f(u,t) =& f(w + u_{\text{app}}) = f(w + W + \varepsilon^2 N_1 + \varepsilon^4 N_2, t) \\ =& f(W,t) + f'(W,t) \cdot (w + \varepsilon^2 N_1 + \varepsilon^4 N_2) \\ &+ \int_0^1 f''(\alpha(w + \varepsilon^2 N_1 + \varepsilon^4 N_2) + W) \cdot (w + \varepsilon^2 N_1 + \varepsilon^4 N_2) \\ &\qquad \otimes (w + \varepsilon^2 N_1 + \varepsilon^4 N_2)(1-\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

Replacing this into the equation of w and using the equation (5.4.2), we obtain that

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} =&\varepsilon^2 f(W,t) + \varepsilon^2 f'(W,t)\cdot(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)\\
&+\varepsilon^2\int_0^1 f''(\alpha(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)+W)\cdot(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)\\
&\qquad\qquad\otimes(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)(1-\alpha)d\alpha\\
&-\varepsilon^2 R_1(W)-\varepsilon^4 R_2(W)-\varepsilon^2\frac{\partial N_1}{\partial t}(W,t)-\varepsilon^2 N_1'(W,t)\cdot(\varepsilon^2 R_1(W)+\varepsilon^4 R_2(W))\\
&-\varepsilon^4\frac{\partial N_2}{\partial t}(W,t)-\varepsilon^4 N_2'(W,t)\cdot(\varepsilon^2 R_1(W)+\varepsilon^4 R_2(W)).\end{aligned}$$

By the equations (5.4.3), it follows that

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} =&\varepsilon^2 f'(W,t)\cdot(w+\varepsilon^4 N_2)\\
&+\varepsilon^2\int_0^1 f''(\alpha(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)+W)\cdot(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)\\
&\qquad\qquad\otimes(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)(1-\alpha)d\alpha\\
&-\varepsilon^6 N_1'(W,t)\cdot R_2(W)-\varepsilon^4 N_2'(W,t)\cdot(\varepsilon^2 R_1(W)+\varepsilon^4 R_2(W)).\end{aligned}$$

Integrating from 0 to t, we then obtain that

$$\begin{aligned}w(t) =&\varepsilon^2\int_0^t f'(W,\tau)\cdot w(\tau)d\tau+\varepsilon^6\int_0^t f'(W,\tau)\cdot N_2(W,\tau)d\tau\\
&-\varepsilon^6\int_0^t N_1'(W,\tau)\cdot R_2(W)d\tau-\varepsilon^4\int_0^t N_2'(W,\tau)\cdot(\varepsilon^2 R_1(W)+\varepsilon^4 R_2(W))d\tau\\
&+\varepsilon^2\int_0^t\int_0^1 f''(\alpha(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)+W)\cdot(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)\\
&\qquad\qquad\otimes(w+\varepsilon^2 N_1+\varepsilon^4 N_2)(1-\alpha)d\alpha d\tau.\end{aligned}\tag{5.4.7}$$

5.4.2 Study of the second order averaged equation in the case of $\mathbb{T}$

Let $W_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$, $s > 1/2$. We consider the averaged equation

$$\begin{cases}\partial_t W = \varepsilon^2 R_1(W)+\varepsilon^4 R_2(W)\\ W(0)=W_0.\end{cases}$$

Since we already computed R_1 and R_2, we can rewrite this equation as :

$$\begin{cases}\partial_t W = \varepsilon^2 f_{\mathrm{res}}(W)+\varepsilon^4\{f'(W,t)\cdot F_{\mathrm{osc}}(W,t)\}_{\mathrm{res}}\\ W(0)=W_0.\end{cases}$$

Setting $\mathcal{W} = \varepsilon W$, we have that $\mathcal{W}$ satisfies the equation :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{W} = f_{\text{res}}(\mathcal{W}) + \{f'(\mathcal{W},t) \cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\text{res}} \\ \mathcal{W}(0) = \varepsilon W_0 =: \mathcal{W}_0. \end{cases} \tag{5.4.8}$$

Lemma 5.4.1. *Let* $s > \frac{1}{2}$. *The problem* (5.4.8) *is locally well-posed in* $H^s(\mathbb{T})$ *at least on a time-interval* $[0, \frac{C}{\varepsilon^2}]$, *where* $C > 0$.

Démonstration. We first estimate the two terms on the right hand-side of equation (5.4.8). By equation (5.3.4), we have that

$$\|R_1(\mathcal{W})\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|f_{\text{res}}(\mathcal{W})\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\|\mathcal{W}\|^3_{H^s(\mathbb{T})}.$$

Then, we explicitly write the Fourier coefficients of $\{f'(\mathcal{W},t) \cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\text{res}}$. Since we have

$$\mathcal{F}\big(f(\mathcal{W})\big)(k) = -i \sum_{k-l+m-j=0} e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)} \hat{\mathcal{W}}(j)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m),$$

it follows that

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\Big(f'(\mathcal{W}) \cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\Big)(k) \qquad (5.4.9)\\
&= -2i \sum_{k-l+m-j=0} e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)} \widehat{F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)}(j)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m) \\
&\quad - i \sum_{k-l+m-j=0} e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)} \hat{\mathcal{W}}(j)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\widehat{F_{\text{osc}}(\mathcal{W})}}(m) \\
&= 2i \sum_{\substack{k-l+m-j=0 \\ j-n+p-q=0 \\ |j|-|n|+|p|-|q|\neq 0}} e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)} \frac{e^{it(|j|-|n|+|p|-|q|)}}{|j|-|n|+|p|-|q|} \hat{\mathcal{W}}(n)\hat{\mathcal{W}}(q)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(p)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m) \\
&\quad + i \sum_{\substack{k-l+m-j=0 \\ m-n+p-q=0 \\ |m|-|n|+|p|-|q|\neq 0}} e^{it(|k|-|l|+|m|-|j|)} \hat{\mathcal{W}}(j)\hat{\mathcal{W}}(l) \frac{e^{-it(|m|-|n|+|p|-|q|)}}{|m|-|n|+|p|-|q|} \overline{\hat{\mathcal{W}}}(n)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(q)\hat{\mathcal{W}}(p).
\end{aligned}$$

Then, $R_2(\mathcal{W})$, the resonant part of $f'(\mathcal{W},t) \cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)$, has the following Fourier coefficients :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(R_2(\mathcal{W})) =&\mathcal{F}\Big(\{f'(\mathcal{W})\cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\text{res}}\Big)(k) \qquad (5.4.10)\\ =&2i \sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ j-n+p-q=0\\ |j|-|n|+|p|-|q|\neq 0\\ |k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|=0}} \frac{1}{|j|-|n|+|p|-|q|}\hat{\mathcal{W}}(n)\hat{\mathcal{W}}(q)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(p)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m)\\ &+i \sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ m-n+p-q=0\\ |m|-|n|+|p|-|q|\neq 0\\ |k|-|l|-|j|+|n|-|p|+|q|=0}} \frac{1}{|m|-|n|+|p|-|q|}\hat{\mathcal{W}}(j)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(n)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(q)\hat{\mathcal{W}}(p)\end{aligned}$$

Noticing that

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}\Big(\{f'(\mathcal{W})\cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\text{res}}\Big)(k)| \leq 2 &\sum_{k-l+m-n+p-q=0} |\hat{\mathcal{W}}(n)\hat{\mathcal{W}}(q)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(p)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m)|\\ &+\sum_{k-l-j+n-p+q=0} |\hat{\mathcal{W}}(j)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(n)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(q)\hat{\mathcal{W}}(p)|,\end{aligned}$$

and proceeding as in the proof of Lemma 5.3.3, we obtain

$$\|R_2(\mathcal{W})\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|\{f'(\mathcal{W})\cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\text{res}}\|_{H^s} \leq C\|\mathcal{W}\|^5_{H^s(\mathbb{T})}. \qquad (5.4.11)$$

We use a standard fixed point argument to prove that equation (5.4.8) is locally well-posed. Define

$$A\mathcal{W}(t) := \mathcal{W}(0) + \int_0^t f_{\text{res}}(\mathcal{W}(\tau))d\tau + \int_0^t \{f'(\mathcal{W}(\tau),\tau)\cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W}(\tau),\tau)\}_{\text{res}}d\tau.$$

We intend to show that there is $T=\frac{C'}{\varepsilon^2}$ such that A is a contraction of the ball

$$B(R) = \Big\{\mathcal{W}\in C([0,T],H^s)\Big|\|\mathcal{W}\|_{L^\infty([0,T],H^s(\mathbb{T}))}\leq R\Big\},$$

where $R=2\|\mathcal{W}_0\|_{H^s(\mathbb{T})} = 2\varepsilon\|W_0\|_{H^s(\mathbb{T})}$. First we notice that A acts on the ball $B(R)$. Indeed, let $\mathcal{W}\in B(R)$. Then,

$$\begin{aligned}\|A\mathcal{W}\|_{L^\infty([0,T],H^s(\mathbb{T}))} &\leq \|\mathcal{W}(0)\|_{H^s(\mathbb{T})} + T\|f_{\text{res}}(\mathcal{W}(\tau))\|_{L^\infty([0,T],H^s(\mathbb{T}))}\\ &+T\|\{f'(\mathcal{W}(\tau),\tau)\cdot F_{\text{osc}}(\mathcal{W}(\tau),\tau)\}_{\text{res}}\|_{L^\infty([0,T],H^s(\mathbb{T}))}\\ &\leq \|\mathcal{W}(0)\|_{H^s(\mathbb{T})} + CT\|\mathcal{W}\|^3_{H^s(\mathbb{T})}(1+\|\mathcal{W}\|^2_{H^s(\mathbb{T})})\\ &\leq \frac{R}{2} + CTR^3(1+R^2).\end{aligned}$$

Choosing $T = \frac{1}{2CR^2(1+R^2)} \leq \frac{C'}{\varepsilon^2}$, we obtain $\|A\mathcal{W}\|_{L^\infty([0,T],H^s(\mathbb{T}))} \leq R$ and thus $A\mathcal{W} \in B(R)$. The fact that A is a contraction follows similarly. Therefore, there exists a unique solution of equation (5.4.8) in $B(R)$. $\square$

Proposition 5.4.2. *Let $W_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$, $s > 1/2$. The solution of the Cauchy problem (5.4.8),*

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{W} = f_{\mathrm{res}}(\mathcal{W}) + \{f'(\mathcal{W},t) \cdot F_{\mathrm{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\mathrm{res}} \\ \mathcal{W}(0) = \varepsilon W_0 =: \mathcal{W}_0, \end{cases}$$

coincides with the solution of the following Cauchy problem :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{Y} = -i\Pi_+(|\mathcal{Y}|^2\mathcal{Y}) - i\Pi_+(|\mathcal{Y}|^2 \frac{1}{D}\Pi_-(|\mathcal{Y}|^2\mathcal{Y})) - \frac{i}{2}\Pi_+(\mathcal{Y}^2 \frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|\mathcal{Y}|^2\mathcal{Y})}) \\ \mathcal{Y}(0) = \varepsilon W_0 =: \mathcal{W}_0 \end{cases} \tag{5.4.12}$$

on its maximal interval of existence.

Démonstration. First we make the observation that we can easily prove local well-posedness of equation (5.4.12) in $H^s(\mathbb{T})$, $s > \frac{1}{2}$ on a time interval $[0, \frac{C}{\varepsilon^2}]$, following the lines of the proof of Lemma 5.4.1. Notice that $\mathcal{Y} \in L^2_+(\mathbb{T})$. Therefore $\mathcal{Y}_-(t) = 0$, for all t in the maximal interval of existence of $\mathcal{Y}$.

In the following we prove that the only terms that do not contain $\mathcal{W}_-$ and thus, contain only $\mathcal{W}_+$ in $\{f'(\mathcal{W},t) \cdot F_{\mathrm{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\mathrm{res}}$ are $-\Pi_+(|\mathcal{W}_+|^2 \frac{1}{D}\Pi_-(|\mathcal{W}_+|^2\mathcal{W}_+))$ and $-\frac{1}{2}\Pi_+(\mathcal{W}_+^2 \frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|\mathcal{W}_+|^2\mathcal{W}_+)})$. Since all the other terms contain at least one factor $\mathcal{W}_-$, it results that the $\mathcal{Y}(t) = \mathcal{Y}_+(t)$ is also solution for equation (5.4.8). By Lemma 5.4.1, we have uniqueness of the solution of equation (5.4.8). Thus, $\mathcal{Y}$ is the unique solution of equation (5.4.8).

It is thus sufficient to determine the terms of $\{f'(\mathcal{W},t) \cdot F_{\mathrm{osc}}(\mathcal{W},t)\}_{\mathrm{res}}$ which do not contain $\mathcal{W}_-$. Let us consider the first term of the Fourier coefficient in equation (5.4.10) :

$$2i \sum_{\substack{k-l+m-j=0 \\ j-n+p-q=0 \\ |j|-|n|+|p|-|q|\neq 0 \\ |k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|=0}} \frac{1}{|j|-|n|+|p|-|q|} \hat{\mathcal{W}}(n)\hat{\mathcal{W}}(q)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(p)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m)$$

The first condition we have for the above sum is that $|j| - |n| + |p| - |q| \neq 0$. As we noticed in Lemma 5.3.1, it follows that j, n, p, q cannot be simultaneously non-positive or non-negative, $j \neq n$, and $j \neq q$. Since in the above expression we have the factor $\hat{\mathcal{W}}(n)\hat{\mathcal{W}}(q)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(p)$, it follows that if we only want to have $\mathcal{W}_+$, then the only possibility is $p, n, q \geq 0$ and $j < 0$. In particular, this also satisfies $j \neq n$ and $j \neq q$.

The second condition we have for the above sum is $|k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|=0$. As a consequence, this yields $|k|-|l|+|m|-|j|=-(|j|-|n|+|p|-|q|)\neq 0$. Thus, k,l,m,j cannot be simultaneously non-positive or non-negative, $k\neq l$, and $k\neq j$. Since in the above sum we see appear the product $\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m)$, if we only want to have $\mathcal{W}_+$, it follows that we have two choices :

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad k,l,m\geq 0; j<0 \text{ and } k\neq l,\\ &\text{(ii)}\quad k<0; l,m\geq 0; j<0.\end{aligned}$$

Note that if $k,l,m\geq 0, j<0$ and if $k=l$, then $k-l+m-n=0$ yields $m=j$, which contradicts the fact that m and j have different signs. Thus, the condition $k\neq l$ in (i) is redundant.

We compute $|k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|$ for the second case (ii) :

$$\begin{aligned}|k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|&=-k-l+m-n+p-q\\ &=-2k+(k-l+m-j)+(j-n+p-q)=-2k<0.\end{aligned}$$

This contradicts the condition $|k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|=0$, and thus the case (ii) does not take place.

In the case (i), we have

$$\begin{aligned}|k|-|l|+|m|-|n|+|p|-|q|&=k-l+m-n+p-q\\ &=(k-l+m-j)+(j-n+p-q)=0.\end{aligned}$$

Moreover,

$$|j|-|n|+|p|-|q|=-j-n+p-q=-2j+(j-n+p-q)=-2j=-2(n-p+q).$$

Thus the only possible choice if we want to obtain terms that do not contain W_-, is the following :

$$\begin{aligned}2i&\sum_{\substack{k-l+m-n+p-q=0\\ n-p+q<0\\ k,l,m,n,p,q\geq 0}}\frac{1}{-2(n-p+q)}\hat{\mathcal{W}}(n)\hat{\mathcal{W}}(q)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(p)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m)\\ &=-i\sum_{\substack{k-l+m-(n-p+q)=0\\ n-p+q<0\\ k,l,m,n,p,q\geq 0}}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{D}\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})\Big)(n-p+q)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(m)\\ &=-i\mathcal{F}\Big(\Pi\big(|\mathcal{W}|^2\frac{1}{D}\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})\big)\Big)(k).\end{aligned}$$

Proceeding similarly with the second resonant part in equation (5.4.10), which is equal to

$$i \sum_{\substack{k-l+m-j=0\\ m-n+p-q=0\\ |m|-|n|+|p|-|q|\neq 0\\ |k|-|l|-|j|+|n|-|p|+|q|=0}} \frac{1}{|m|-|n|+|p|-|q|} \hat{\mathcal{W}}(j)\hat{\mathcal{W}}(l)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(n)\overline{\hat{\mathcal{W}}}(q)\hat{\mathcal{W}}(p),$$

we obtain that it contains only one term in which W_- does not appear, which is

$$-\frac{i}{2}\mathcal{F}\Big(\Pi_+\big(\mathcal{W}^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W})}\big)\Big)(k).$$

Therefore, the conclusion of the proposition follows. □

Proposition 5.4.3. *Let $s>\frac{1}{2}$, $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$, and $\delta>0$ small enough. Consider the equations*

$$\begin{cases}\partial_t Y = -i\varepsilon^2\Pi_+(|Y|^2Y) - i\varepsilon^4\Pi_+(|Y|^2\frac{1}{D}\Pi_-(|Y|^2Y)) - \frac{i\varepsilon^4}{2}\Pi_+(Y^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|Y|^2Y)})\\ Y(0)=W_0\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}\partial_t U = -i\varepsilon^2\Pi_+(|U|^2U)\\ U(0)=W_0.\end{cases} \tag{5.4.13}$$

Assume that $\|U(t)\|_{H^s}\le C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$ for all $t\in\mathbb{R}$. Then, for $0\le t\le \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, we have that

$$\|Y(t)-U(t)\|_{H^s}\le\varepsilon^{2-C_0\delta},$$

where $C_0>0$ is a constant and δ is chosen small enough such that $C_0\delta<1$. In particular, $\|Y(t)\|_{H^s}\le C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^\alpha$.

Démonstration. Set $Z:=Y-U$. Then Z satisfies the equation

$$\begin{cases}\partial_t Z = -i\varepsilon^2\Big(\Pi_+(|Y|^2Y)-\Pi_+(|U|^2U)\Big) - i\varepsilon^4\Pi_+(|Y|^2\frac{1}{D}\Pi_-(|Y|^2Y))\\ \qquad\quad -\frac{i\varepsilon^4}{2}\Pi_+(Y^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|Y|^2Y)})\\ Z(0)=0.\end{cases}$$

We set also

$$\begin{aligned} h(U) &:= -i\Pi_+(|U|^2U) \\ g(U) &:= -i\Pi_+(|U|^2\frac{1}{D}\Pi_-(|U|^2U)) - \frac{i}{2}\Pi_+(U^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|U|^2U)}). \end{aligned}$$

Then, we have

$$Z(t) = \varepsilon^2 \int_0^t \Big(h(Y(\tau)) - h(U(\tau))\Big)d\tau + \varepsilon^4 \int_0^t g(Y(\tau))d\tau.$$

In what follows, we use a bootstrap argument. Set

$$T := \sup\Big\{t \geq 0 \Big| \|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq 1\Big\}.$$

We prove that $T > \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. Suppose by contradiction that

$$T \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}. \tag{5.4.14}$$

The following inequalities hold :

$$\|h(Y(t)) - h(U(t))\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \sup_{\alpha\in[0,1]} \|h'(\alpha Z(t) + U(t))\| \tag{5.4.15}$$

$$\|g(Y(t))\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|g(U(t))\|_{H^s(\mathbb{T})} + \|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \sup_{\alpha\in[0,1]} \|g'(\alpha Z(t) + U(t))\|$$

where $\|\cdot\|$ denotes the norm of a bounded linear operator acting on H^s. Then, for $0 \leq t \leq T$, we have

$$\begin{aligned} \|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \varepsilon^2 &\int_0^t \|Z(\tau)\|_{H^s(\mathbb{T})} \sup_{\alpha\in[0,1]} \|h'(\alpha Z(\tau) + U(\tau))\|d\tau \\ &+ \varepsilon^4 \int_0^t \|g(U(\tau))\|_{H^s(\mathbb{T})}d\tau + \varepsilon^4 \int_0^t \|Z(\tau)\|_{H^s(\mathbb{T})} \sup_{\alpha\in[0,1]} \|g'(\alpha Z(\tau) + U(\tau))\|d\tau. \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Let us first show that the suprema in (5.4.15) are finite if $0 \leq t \leq T$. Using the fact that for $s > 1/2$, H^s is an algebra, we have that :

$$\|h'(X_1) \cdot X_2\|_{H^s} = \|2\Pi_+(|X_1^2|X_2) + \Pi_+(X_1^2\overline{X_2})\|_{H^s} \leq 3\|X_1\|_{H^s}^2\|X_2\|_{H^s}.$$

Since $\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$, we obtain that

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \|h'(\alpha Z(t) + U(t))\| \leq 3\|\alpha Z(t) + U(t)\|_{H^s(\mathbb{T})}^2 \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha}.$$

Secondly, we have

$$\begin{aligned} g'(X_1)\cdot X_2 =& -i\Pi_+(X_2\overline{X_1}\frac{1}{D}\Pi_-(|X_1|^2X_1)) - i\Pi_+(X_1\overline{X_2}\frac{1}{D}\Pi_-(|X_1|^2X_1)) \\ & -2i\Pi_+(|X_1|^2\frac{1}{D}\Pi_-(X_2|X_1|^2)) - i\Pi_+(|X_1|^2\frac{1}{D}\Pi_-(X_1^2\overline{X_2})) \\ & -i\Pi_+(X_2X_1\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(|X_1|^2X_1)}) - i\Pi_+(X_1^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(X_2|X_1|^2)}) \\ & -\frac{i}{2}\Pi_+(X_1^2\frac{1}{D}\overline{\Pi_-(X_1^2\overline{X_2})}). \end{aligned}$$

All the terms can be treated similarly. For example, for the first one we have

$$\begin{aligned} \|-i\Pi(X_2\overline{X_1}\frac{1}{D}\Pi_-(|X_1|^2X_1))\|_{H^s(\mathbb{T})} &\leq \|X_1\|_{H^s(\mathbb{T})}\|X_2\|_{H^s(\mathbb{T})}\|\frac{1}{D}\Pi_-(|X_1|^2X_1))\|_{H^s(\mathbb{T})} \\ &\leq \|X_1\|_{H^s(\mathbb{T})}\|X_2\|_{H^s(\mathbb{T})}\Big(\sum_{k\leq -1}\frac{(1+|k|^2)^s}{k^2}\big|\widehat{|X_1|^2X_1}(k)\big|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \|X_1\|_{H^s(\mathbb{T})}\|X_2\|_{H^s(\mathbb{T})}\Big(\sum_{k\leq -1}(1+|k|^2)^s\big|\widehat{|X_1|^2X_1}(k)\big|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \|X_1\|_{H^s(\mathbb{T})}\|X_2\|_{H^s(\mathbb{T})}\||X_1|^2X_1\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|X_1\|^4_{H^s(\mathbb{T})}\|X_2\|_{H^s(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\sup_{\alpha\in[0,1]}\|g'(\alpha Z(t)+U(t))\| \leq \|\alpha Z(t)+U(t)\|^4_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{4\alpha},$$

for $0\leq t\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. Similarly, we prove that

$$\|g(U(t))\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\|U(t)\|^5_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{5\alpha}.$$

By equation (5.4.16), we then have

$$\begin{aligned} \|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq& \varepsilon^2\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha}C\int_0^t\|Z(\tau)\|d\tau + \varepsilon^4\int_0^t\|g(U(\tau))\|_{H^s(\mathbb{T})}d\tau \\ \leq& \varepsilon^2\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha}C\int_0^t\|Z(\tau)\|d\tau + \varepsilon^4\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{5\alpha}Ct. \end{aligned}$$

Using Gronwall's inequality, we thus obtain for if $0\leq t\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, that

$$\begin{aligned} \|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq& C\varepsilon^4\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{5\alpha}te^{C\varepsilon^2\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha}t} \\ \leq& C\varepsilon^2\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1+3\alpha}e^{C\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})} \leq \varepsilon^{2-C_0\delta} \end{aligned}$$

where $C_0 > 0$ is a constant. If δ is small enough, then this estimate is much better than the one considered in the definition of T. Therefore, there exists $\gamma > 0$ such that for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha} + \gamma$ we have that $\|Z(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq 1$. This contradicts the assumption (5.4.14) we made on T. Thus, $T > \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$, and moreover

$$\|Z(t)\|_{H^s} \leq \varepsilon^{2-C_0\delta}$$

for all $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. □

5.4.3 Proof of Theorem 5.1.7

Lemma 5.4.4. *For $W \in H^s(\mathbb{T})$ we have that*

$$\begin{aligned}\|f'(W,t)\| \leq& C\|W\|^2_{H^s},\\ \|f''(W,t)\| \leq& C\|W\|_{H^s}.\end{aligned}$$

where $\|\cdot\|$ denotes the operator norm of a bounded linear operator acting on $H^s(\mathbb{T})$.

In addition, the following applications are continuous and N-linear on $H^s(\mathbb{T})$:

1. *$W \mapsto N_2(W,t)$ with $N = 5$,*

2. *$W \mapsto f'(W,t)\cdot R_2(W)$, $W \mapsto N_1'(W,t)\cdot R_2(W)$, $W \mapsto N_2'(W,t)\cdot R_1(W)$ with $N = 7$,*

3. *$W \mapsto N_2'(W,t)\cdot R_2(W)$ with $N = 9$.*

In particular, if $\|W\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$, then their $H^s(\mathbb{T})$-norms are all bounded by $\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{9\alpha}$.

Démonstration. The proof follows the same lines as that of Lemma 5.3.3. □

Proof of Theorem 5.1.7. By Lemma 5.4.2, we have that the solution of the averaged equation (5.4.8) is $\mathcal{W}(t) = \mathcal{Y}(t)$. By hypothesis, we have that the solution of equation (5.4.13) satisfies $\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$ Then, by Lemma 5.4.3, it follows that $\|W(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|Y(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{\alpha}$. Using the estimates of Lemma 5.4.4, it follows from equation (5.4.7), that

$$\|w(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \varepsilon^2\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha} C\int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s(\mathbb{T})}d\tau + \varepsilon^6\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{9\alpha} Ct,$$

for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. Then, by Gronwall's inequality we obtain

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq & \varepsilon^6\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{9\alpha} Cte^{\varepsilon^2\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{2\alpha}Ct} \\ \leq & \varepsilon^4\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1+7\alpha} e^{C\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})} \leq \varepsilon^{4-C_0\delta},\end{aligned}$$

where $C_0 > 0$. Thus, $\|u(t) - W(t) - \varepsilon^2 N_1(W,t) - \varepsilon^4 N_2(W,t)\|_{H^s} \leq \varepsilon^{4-C_0\delta}$ for $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{1-2\alpha}$. Since $\|N_2(W,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C\Big(\log(\frac{1}{\varepsilon^\delta})\Big)^{5\alpha}$, this yields

$$\|u(t) - W(t) - \varepsilon^2 F_{\text{osc}}(W,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|u(t) - W(t) - \varepsilon^2 N_1(W,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \varepsilon^{4-C_0\delta}.$$

Changing back to the variables $v = \varepsilon e^{-i|D|t}u$ and $\mathcal{W} = \varepsilon W$, the conclusion of the theorem follows :

$$\|v(t) - e^{-i|D|t}\big(\mathcal{W}(t) + F_{\text{osc}}(\mathcal{W},t)\big)\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|u(t) - W(t) - \varepsilon^2 N_1(W,t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \varepsilon^{5-C_0\delta}.$$

□

Chapitre 6

Soliton interaction with small Toeplitz potential for the Szegö equation on the real line

Ce chapitre est la reprise d'un article en préparation.

6.1 Introduction

One of the most important properties in the study of the nonlinear Schrödinger equations (NLS) is *dispersion*. It is often exhibited in the form of the Strichartz estimates of the corresponding linear flow. In case of the cubic NLS :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times M, \tag{6.1.1}$$

Gérard and Grellier [34] remarked that there is a lack of dispersion when M is a sub-Riemannian manifold (for example, the Heisenberg group). In this situation, many of the classical arguments used in the study of NLS no longer hold. As a consequence, even the problem of global well-posedness of (6.1.1) on a sub-Riemannian manifold still remains open. In [35, 34], Gérard and Grellier introduced a model of a non-dispersive Hamiltonian equation called *the cubic Szëgo equation.* (See (6.1.2) below.) The study of this equation is expected to give new tools to be used in understanding existence and other properties of smooth solutions of NLS in the absence of dispersion.

In this paper we will consider the Szegö equation on the real line. The space of solutions in this case is the Hardy space $L^2_+(\mathbb{R})$ on the upper half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z; \mathrm{Im} z > 0\}$, defined by

$$L^2_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \operatorname{supp} \hat{f} \subset [0, \infty)\}.$$

The corresponding Sobolev spaces $H^s_+(\mathbb{R})$, $s \geq 0$ are defined by :

$$H^s_+(\mathbb{R}) = \Big\{ h \in L^2_+(\mathbb{R}); \|h\|_{H^s_+} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (1+|\xi|^2)^s |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

The Szegö projector Π is the projector on the non-negative frequencies,
$\Pi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2_+(\mathbb{R})$

$$\Pi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

For $u \in L^2_+(\mathbb{R})$, we consider *the Szëgo equation on the real line* :

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{6.1.2}$$

This equation is globally well-posed in $H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{R})$.

On $L^2_+(\mathbb{R})$ we introduce the symplectic form

$$\omega(u,v) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} u\bar{v} dx$$

and the real scalar product

$$\langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} u\bar{v} dx.$$

Let $\mathcal{D} \subset L^2_+(\mathbb{R})$ be a dense subset of $L^2_+(\mathbb{R})$. We say that a function $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ admits a Hamiltonian vector field $X_F : \mathcal{D} \to L^2_+(\mathbb{R})$ if

$$d_u F(h) = \omega(h, X_F(u)),$$

for all $u, h \in \mathcal{D}$. The function

$$H(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^4 dx$$

defined on $L^4_+(\mathbb{R})$, admits the Hamiltonian vector field

$$X_H(u) = -i\Pi(|u|^2 u),$$

Thus the Szegö equation is a Hamiltonian evolution. The most remarkable property of this equation is the fact that it is completely integrable in the sense that it posses a Lax pair structure [75]. The Lax pair is given in terms of *Hankel and Toeplitz operators.*

A Hankel operator $H_u : L^2_+ \to L^2_+$ of symbol $u \in H^{1/2}_+$ is defined by

$$H_u(h) = \Pi(u\bar{h}).$$

H_u is a Hilbert-Schmidt operator, it is $\mathbb{C}$-anti-linear and satisfies

$$(H_u(h_1), h_2) = (H_u(h_2), h_1). \tag{6.1.3}$$

A Toeplitz operator $T_b : L^2_+ \to L^2_+$ of symbol $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ is defined by

$$T_b(h) = \Pi(bh).$$

T_b is $\mathbb{C}$-linear and bounded. Moreover, T_b is self-adjoint if and only if b is real-valued.

In what follows we consider the perturbed Szegö equation with a small Toeplitz potential

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u) + \varepsilon T_b u. \tag{6.1.4}$$

This is no longer a completely integrable equation. It is still globally well posed in $H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{R})$ if $b \in H^1(\mathbb{R})$. This can be proved by following the lines of the proof of Theorem 2.1 in [35] on the global well-posedness of the Szegö equation.

If instead of the Toeplitz potential we considered a multiplicative linear potential bu, then the corresponding equation would no longer be Hamiltonian. However, if we project to L^2_+, obtaining this way a Toeplitz potential $T_b u = \Pi(bu)$, we conserve the Hamiltonian structure of the Szegö equation. For this reason, the Toeplitz potential is the natural generalization of the linear multiplicative potential in the case of the Szegö equation.

The Hamiltonian of equation (6.1.4) is

$$H_b(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^4 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(x)|^2 dx.$$

This yields that the Hamiltonian H_b is formally conserved by the flow. Note also that the fact that b is a real valued function, yields the conservation of the mass $Q(u) = \int |u|^2 dx$.

The goal of the paper is to study the long time behavior of the solution of the perturbed Szegö equation (6.1.4) having as initial condition a soliton of the unperturbed equation.

Definition 25. *A soliton for the Szegö equation on the real line is a solution u with the property that there exist $c, \omega \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ such that*

$$u(t, x) = e^{-it\omega} u_0(x - ct).$$

In [75, Theorem 2] it was proved that all the initial data of solitons for the Szegö equation on $\mathbb{R}$ are of the form

$$u_0 = e^{i\phi_0}\alpha_0\mu_0\eta(\mu_0(x-a_0)) = \frac{e^{i\phi_0}\alpha_0}{x-a_0+\frac{i}{\mu_0}}, \tag{6.1.5}$$

where $\eta(x) := \frac{1}{x+i}$, $\alpha_0, \mu_0 \in (0,\infty)$, and $\phi_0, a_0 \in \mathbb{R}$, and that the corresponding solution is

$$u(t,x) = e^{i\phi(t)}\alpha_0\mu_0\eta(\mu_0(x-a(t))) = \frac{e^{i\phi(t)}\alpha_0}{x-a(t)+\frac{i}{\mu_0}}, \tag{6.1.6}$$

where $\phi(t) = -\frac{\alpha_0^2\mu_0^2}{4}t + \phi_0$ and $a(t) = \frac{\alpha_0^2\mu_0}{2}t + a_0$.

We show that the solution of the perturbed Szegö equation (6.1.4) with initial data $u_0 = e^{i\phi_0}\alpha_0\mu_0\eta(\mu_0(x-a_0))$ preserves the form $u = e^{i\phi}\alpha\mu\eta(\mu(x-a))$ over a large interval of time, and the time dependent parameters a, α, ϕ, μ evolve according to the effective dynamics, up to small corrections. More precisely, the main result of the paper is the following theorem.

Theorem 6.1.1. *Let $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function in $H^1(\mathbb{R})$ with the property that $b' \in L^1(\mathbb{R})$. Let $0 < \varepsilon \ll 1$ and $0 < \delta < \frac{1}{2}$. If u is a solution of the perturbed Szegö equation with a small Toeplitz potential*

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi(|u|^2u) + \varepsilon T_b u \\ u(0,x) = \alpha_0 e^{i\phi_0}\mu_0\eta(\mu_0(x-a_0)), \end{cases} \tag{6.1.7}$$

where $a_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$ and $\alpha_0, \mu_0 \in (0,\infty)$, then

$$\|u(t) - \alpha(t)e^{i\phi(t)}\mu(t)\eta(\mu(t)(x-a(t)))\|_{H^{\frac{1}{2}}_+} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}},$$

for times $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}\ln(\frac{1}{\varepsilon})$, where c_0 is a constant depending only on α_0 and μ_0, and a, α, ϕ, μ satisfy

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\alpha^2\mu}{2} - \frac{2\varepsilon}{\pi\mu}\int b'(a+\frac{x}{\mu})\frac{x}{\mu}|\eta(x)|^2dx + O(\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}), \\ \dot{\alpha} = \frac{\varepsilon\alpha}{\pi\mu}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2dx + O(\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}), \\ \dot{\phi} = -\frac{\alpha^2\mu^2}{4} - \frac{\varepsilon}{\pi}\int b(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2dx - \frac{\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})\frac{x}{\mu}|\eta(x)|^2dx + O(\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}), \\ \dot{\mu} = -\frac{2\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2dx + O(\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}). \end{cases} \tag{6.1.8}$$

In addition, if $\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\phi}, \bar{\mu}$ satisfy

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = \frac{\bar{\alpha}^2\bar{\mu}}{2} - \frac{2\varepsilon}{\pi\bar{\mu}} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})\frac{x}{\bar{\mu}}|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\bar{\alpha}} = \frac{\varepsilon\bar{\alpha}}{\pi\bar{\mu}} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\bar{\phi}} = -\frac{\bar{\alpha}^2\bar{\mu}^2}{4} - \frac{\varepsilon}{\pi} \int b(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})|\eta(x)|^2 dx - \frac{\varepsilon}{\pi} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})\frac{x}{\bar{\mu}}|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\bar{\mu}} = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \int b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})|\eta(x)|^2 dx, \end{cases} \tag{6.1.9}$$

with the same initial data $a_0, \alpha_0, \phi_0, \mu_0$, then

$$\begin{cases} |a - \bar{a}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}), \\ |\alpha - \bar{\alpha}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}), \\ |\phi - \bar{\phi}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{2\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon})^2, \\ |\mu - \bar{\mu}| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}). \end{cases} \tag{6.1.10}$$

where $\tilde{c}_0$ depends on α_0, μ_0.

As a consequence, if ε is small enough and $\frac{3}{10} < \delta < \frac{1}{2}$, then for times $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ we have that

$$\|u(t) - \bar{\alpha}(t) e^{i\bar{\phi}(t)} \bar{\mu}(t) \eta(\bar{\mu}(t)(x - \bar{a}(t)))\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}. \tag{6.1.11}$$

The problem of studying the solution of a perturbed equation having as initial condition a soliton of the unperturbed equation was first addressed in the setting of the nonlinear Schrödinger equation by Bronski and Jerrard in [14] and their result was improved by Keraani in [54, 55]. They considered the semiclassical regime which is equivalent to adding a slowly varying potential $V(\varepsilon x)$. The method consists in using the orbital stability of the soliton and the result states that the center of mass moves according to Newton's equation $a''(t) = -DV(a)$. It seems difficult to adapt this method to the setting of the Szegö equation since it extensively exploits the relations between the densities of mass, energy, and momentum. These identities have no correspondent for the Szegö equation.

This problem was also considered by Fröhlich, Tsai, and Yau and Fröhlich, Gustafson, Jonsson, and Sigal in the settings of the Hartree equation and of the nonlinear Schrödinger equation with a general nonlinearity in [31, 29, 30]. Some of these results were improved in [48, 49] by Zworski and Holmer in the case of the one dimensional nonlinear Schrödinger equation with a Dirac potential and with a slowly varying potential. In this paper we adapt the method of Zworski and Holmer to the case of the Szegö equation.

The starting point in proving Theorem 6.1.1 is to determine the vector field corresponding to the restriction $H_b|_M$ of the Hamiltonian to the four-dimensional manifold of solitons

$$M = \{e^{i\phi}\alpha\mu\eta(x-a)), \phi, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \mu > 0\}.$$

Then, we determine the flow of this vector field, called the *effective dynamics*. In the case of the Szegö equation with a small Toeplitz potential the effective dynamics are given in the system (6.1.9). We then decompose the flow of the perturbed Szegö equation (6.1.4) into a part belonging to the manifold M and a part which is symplectically orthogonal to M. We show that the part of the solution which is orthogonal to M is small. Thus, the flow of (6.1.4) is close to M. Then, the heuristics pointed out by Holmer and Zworski suggest that the flow is close to the flow of $H_b|_M$, i.e. the effective dynamics. This can be rigorously proved and yields the approximation (6.1.11).

In proving that the part of the flow which is orthogonal to M is small we consider the Lyapunov functional and use the coerciveness of the linearized operator.

First we consider the functional $\mathcal{E} : H_+^{1/2} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{4}\int |u|^4 dx + \frac{i}{4}\int (\partial_x u)\bar{u} dx - \frac{1}{8}\int |u|^2 dx. \tag{6.1.12}$$

Then $\eta = \frac{1}{x+i}$ is a critical point of $\mathcal{E}$, i.e. $d_\eta \mathcal{E} = 0$ since

$$\frac{i}{2}\partial_x \eta + \Pi(|\eta|^2\eta) - \frac{\eta}{4} = 0. \tag{6.1.13}$$

The Lyapunov functional is defined by

$$L(w) = \mathcal{E}(w+\eta) - \mathcal{E}(w)$$

and the linearized operator $\mathcal{L} : H_+^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ is

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{E}''_\eta w = -\frac{i}{2}\partial_x w - 2T_{|\eta|^2} w - H_{\eta^2} w + \frac{1}{4} w. \tag{6.1.14}$$

In [48], Holmer and Zworski consider the case of the nonlinear cubic Schrödinger equation with a Dirac potential, that can be generalized to the case of a multiplicative linear potential. The maximal time for which the approximation holds is of order $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Thus, the result we obtain for the Szegö equation with a Toeplitz potential (the natural extension of the multiplicative potential) is close to [48]. However, working with the Lyapunov functional as it was done in [48] does not give the desired result in the case of the Szegö equation, since we no longer have a Galilean invariance. Consequently, we use the linearized operator, as it was done by the above cited authors in [49], in the case of a slowly varying potential.

Notice that the *exact effective dynamics* given by $\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\phi}, \bar{\mu}$, are an approximation of the solution of the perturbed equation only for times

$$0 < t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{5}}} \ln(\frac{1}{\varepsilon}),$$

where $\delta > \frac{3}{10}$. (If we agree to have an approximation of order $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, instead of that of order $\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}$ that we have, we can actually go up to times $0 < t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$.) For larger times, the approximation is only given by a, α, ϕ, μ, which are *perturbations of the effective dynamics*. The fact that we cannot approximate the solution by the exact effective dynamics for larger times (i.e. $0 < \delta < \frac{3}{10}$) is due to the estimate on $|\phi - \bar{\phi}|$ which is only of order $O(\varepsilon^{2\delta-})$, while we need an approximation of order $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}})$. This difficulty is caused by the complicated form of the effective dynamics and by the fact that the perturbed equation does not conserve the momentum $\|u\|^2_{\dot{H}^{1/2}_+}$. In the case of the nonlinear Schrödinger equation with a Dirac or a slowly varying potential, the effective dynamics have a simpler form and give a good approximation of the solution for all the range of times considered in [48, 49].

The structure of the paper is as follows. In section 2 we briefly describe the manifold of solitons. In section 3 we find the effective dynamics. In section 4 we use the implicit function theorem to prove the orthogonal decomposition of the flow and determine the equation of w, the part of the flow which is orthogonal to M. In section 5 we prove the coerciveness of the linearized operator in directions orthogonal to the manifold M. In section 6 we estimate w using a bootstrap argument and in section 7 we conclude the proof of Theorem 6.1.1.

6.2 Manifold of solitons

We introduce below the manifold of solitons for the Szegö equation on the real line.

For $g = (a, \alpha, \phi, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$, where $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, we define the following map on $L^2_+(\mathbb{R})$

$$u \mapsto g \cdot u, \quad g \cdot u(x) := e^{i\phi} \alpha \mu u(\mu(x-a)).$$

This action gives a group structure on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$(a, \alpha, \phi, \mu) \cdot (a', \alpha', \phi', \mu') = (a'', \alpha'', \phi'', \mu''),$$

where

$$\begin{cases} a'' = a + \frac{a'}{\mu} \\ \alpha'' = \alpha\alpha' \\ \phi'' = \phi + \phi' \\ \mu'' = \mu\mu'. \end{cases} \tag{6.2.1}$$

We denote this group by G. In order to determine the Lie algebra $\mathfrak{g}$ corresponding to this Lie group, we compute

$$\begin{aligned} \partial_a[(a,1,0,1)\cdot u]\Big|_{a=0} &= -\partial_x u \\ \partial_\alpha[(0,\alpha,0,1)\cdot u]\Big|_{\alpha=1} &= u \\ \partial_\phi[(0,1,\phi,1)\cdot u]\Big|_{\phi=0} &= iu \\ \partial_\mu[(0,1,0,\mu)\cdot u]\Big|_{\mu=1} &= x\partial_x u + u = \partial_x(x\cdot u). \end{aligned}$$

Then, the Lie algebra $\mathfrak{g}$ is generated by

$$e_1 = -\partial_x, \;\; e_2 = 1, \;\; e_3 = i, \;\; e_4 = \partial_x \cdot x.$$

It acts on $\cup_{N\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(N)$, where

$$\mathcal{M}(N) := \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \in L^2_+ \middle| \deg(B) = N, \, \deg(A) \le N-1, \, B(0) = 1, \, pgcd(A,B) = 1 \right\}.$$

Notice that according to [69][Lemma 6.2.1], we have that $\cup_{N\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(N)$ is dense in $L^2_+(\mathbb{R})$.

The action g is conformally symplectic in the sense that

$$g^*\omega = \alpha^2(g)\mu(g)\omega. \tag{6.2.2}$$

Indeed, with the change of variables $y = \mu(x-a)$

$$\begin{aligned} (g^*\omega)(u,v) &= \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} e^{i\phi}\alpha\mu u(\mu(x-a))e^{-i\phi}\alpha\mu\bar{v}(\mu(x-a))dx \\ &= \alpha^2\mu\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} u(y)\bar{v}(y)dy = \alpha^2\mu\omega(u,v). \end{aligned}$$

Definition 26. *The manifold of solitons is the orbit of η, $\eta(x) = \frac{1}{x+i}$, under the action of the group G :*

$$M = G\cdot\eta = \{e^{i\phi}\alpha\mu\eta(\mu(x-a)), \phi, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \mu > 0\}.$$

We then make the following identifications :

$$M = G \cdot \eta \simeq G, \;\; T_\eta M = \mathfrak{g} \cdot \eta \simeq \mathfrak{g}. \tag{6.2.3}$$

For $b = 0$, the flow of H_0 is tangent to the manifold of solitons M. This corresponds to the fact that if $u(0, x) \in M$, then $u(t, x) \in M$ for all $t \in \mathbb{R}$. More precisely, by equations (6.1.5) and (6.1.6), we have that if $u(0, x) = e^{i\phi}\alpha\mu\eta(\mu(x - a))$, then

$$u(t, x) = g(t) \cdot \eta = e^{i\phi(t)}\alpha(t)\mu(t)\eta\big(\mu(t)(x - a(t))\big),$$

where

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \frac{\alpha^2\mu}{2} \\ \dot{\alpha}(t) = 0 \\ \dot{\phi}(t) = -\frac{\alpha^2\mu^2}{4} \\ \dot{\mu}(t) = 0. \end{cases}$$

6.3 Effective dynamics

We will compute in this section the restriction to the manifold of solitons M of the symplectic form $\omega|_M$ and prove that $(M, \omega|_M)$ is a symplectic manifold. Then, we compute the restriction of the Hamiltonian $H_b|_M$, as well as the vector field associated to $H_b|_M$. This vector field yields a flow on the manifold of solitons M, that we refer to as the *effective dynamics*.

First we compute $(\omega|_M)_\eta$ on $T_\eta M$, at the point η. Using

$$(\omega|_M)_\eta(e_i, e_j) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} (e_i \cdot \eta)(x)\overline{(e_j \cdot \eta)(x)}dx,$$

and the residue theorem, we get

$$\begin{aligned} (\omega|_M)_\eta(e_1, e_2) =& -\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(\frac{1}{x+i})\overline{\frac{1}{x+i}}dx = -\frac{\pi}{2}, \\ (\omega|_M)_\eta(e_1, e_3) =& 0, \quad\;\; (\omega|_M)_\eta(e_1, e_4) = -\frac{\pi}{2}, \quad (\omega|_M)_\eta(e_2, e_3) = -\pi \\ (\omega|_M)_\eta(e_2, e_4) =& 0, \quad\;\; (\omega|_M)_\eta(e_3, e_4) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hence

$$(\omega|_M)_\eta = \frac{\pi}{2}(d\alpha \wedge da + d\mu \wedge da + 2d\phi \wedge d\alpha + d\phi \wedge d\mu). \tag{6.3.1}$$

Let us now compute $(\omega|_M)_{g\cdot\eta}$ for arbitrary $g \in G$. By (6.2.3) we can identify the action of g on M with the action $g : G \to G$ given by (6.2.1). Then, we have that the differential $d_\eta g : T_\eta M \to T_{g\cdot\eta} M$ is given by

$$d_\eta g = \frac{1}{\mu} da + \alpha d\alpha + d\phi + \mu d\mu. \tag{6.3.2}$$

By equation (6.2.2), we have that

$$\omega_{g\cdot\eta}\big(d_\eta g(u), d_\eta g(v)\big) = \alpha^2 \mu \omega_\eta(u, v). \tag{6.3.3}$$

Then, equations (6.3.2), (6.3.3), and (6.3.1) yield

$$\begin{aligned}
&(\omega|_M)_{g\cdot\eta}\Big(X_1(\frac{\partial}{\partial a})_{g\cdot\eta} + X_2(\frac{\partial}{\partial \alpha})_{g\cdot\eta} + X_3(\frac{\partial}{\partial \phi})_{g\cdot\eta} + X_4(\frac{\partial}{\partial \mu})_{g\cdot\eta},\\
&\qquad Y_1(\frac{\partial}{\partial a})_{g\cdot\eta} + Y_2(\frac{\partial}{\partial \alpha})_{g\cdot\eta} + Y_3(\frac{\partial}{\partial \phi})_{g\cdot\eta} + Y_4\Big(\frac{\partial}{\partial \mu}\Big)_{g\cdot\eta}\Big)\\
&= \alpha^2\mu(\omega|_M)_\eta\Big(\mu X_1(\frac{\partial}{\partial a})_\eta + \frac{X_2}{\alpha}(\frac{\partial}{\partial \alpha})_\eta + X_3(\frac{\partial}{\partial \phi})_\eta + \frac{X_4}{\mu}(\frac{\partial}{\partial \mu})_\eta,\\
&\qquad \mu Y_1(\frac{\partial}{\partial a})_\eta + \frac{Y_2}{\alpha}(\frac{\partial}{\partial \alpha})_\eta + Y_3(\frac{\partial}{\partial \phi})_\eta + \frac{Y_4}{\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial \mu}\Big)_\eta\Big)\\
&= \frac{\pi}{2}\alpha^2\mu(\frac{\mu}{\alpha} d\alpha \wedge da + d\mu \wedge da + \frac{2}{\alpha} d\phi \wedge d\alpha + \frac{1}{\mu} d\phi \wedge d\mu)\\
&\qquad \Big(X_1(\frac{\partial}{\partial a})_\eta + X_2(\frac{\partial}{\partial \alpha})_\eta + X_3(\frac{\partial}{\partial \phi})_\eta + X_4(\frac{\partial}{\partial \mu})_\eta,\\
&\qquad Y_1(\frac{\partial}{\partial a})_\eta + Y_2(\frac{\partial}{\partial \alpha})_\eta + Y_3(\frac{\partial}{\partial \phi})_\eta + Y_4\Big(\frac{\partial}{\partial \mu}\Big)_\eta\Big).
\end{aligned}$$

Thus,

$$\omega|_M = \alpha^2\mu\frac{\pi}{2}(\frac{\mu}{\alpha} d\alpha \wedge da + d\mu \wedge da + \frac{2}{\alpha} d\phi \wedge d\alpha + \frac{1}{\mu} d\phi \wedge d\mu). \tag{6.3.4}$$

One can easily verify that $\omega|_M$ is a non-degenerate symplectic form and therefore, $(M, \omega|_M)$ is a symplectic manifold.

Let f be a function defined on $M \simeq G$. Then, f admits a Hamiltonian vector field X_f on M if

$$\omega|_M(\cdot, X_f) = df = f_a da + f_\alpha d\alpha + f_\mu d\mu + f_\phi d\phi,$$

where $f_a = \frac{\partial f}{\partial_a}$ and f_α, f_ϕ, and f_μ are defined similarly. Denoting $X_f = X_1\frac{\partial}{\partial a} + X_2\frac{\partial}{\partial \alpha} + X_3\frac{\partial}{\partial \phi} + X_4\frac{\partial}{\partial \mu}$ and using (6.3.4), the above equation is equivalent to

$$\alpha^2\mu\frac{\pi}{2}\Big(\frac{\mu}{\alpha}(X_1 d\alpha - X_2 da) + (X_1 d\mu - X_4 da) + \frac{2}{\alpha}(X_2 d\phi - X_3 d\alpha) + \frac{1}{\mu}(X_4 d\phi - X_3 d\mu)\Big)$$
$$= f_a da + f_\alpha d\alpha + f_\mu d\mu + f_\phi d\phi.$$

Then, the components of the vector field X_f are

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{2}{\alpha^2\mu^2\pi}(-2\mu f_\mu + \alpha f_\alpha), \\ X_2 = \frac{2}{\alpha^2\mu^2\pi}(\alpha f_a + \alpha\mu f_\phi), \\ X_3 = \frac{2}{\alpha^2\mu\pi}(\mu f_\mu - \alpha f_\alpha), \\ X_4 = -\frac{2}{\alpha^2\mu\pi}(\mu f_\phi + 2 f_a). \end{cases}$$

This allows us to determine the Hamiltonian flow associated to X_f, $\dot{u} = X_f(u)$, which is given by $(\dot{a}, \dot{\alpha}, \dot{\phi}, \dot{\mu}) = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Let us now compute $H_b|_M$ and find its Hamiltonian vector field.

$$\begin{aligned} H_b|_M(g\cdot\eta) &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \alpha^4\mu^4|\eta(\mu(x-a))|^4 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}} b(x)\alpha^2\mu^2|\eta(\mu(x-a))|^2 dx \\ &= \frac{\alpha^4\mu^3}{4}\int_{\mathbb{R}}|\eta(x)|^4 dx + \frac{\varepsilon\alpha^2\mu^2}{2}\int_{\mathbb{R}} b(x)|\eta(\mu(x-a))|^2 dx \\ &= \frac{\alpha^4\mu^3\pi}{8} + \frac{\varepsilon\alpha^2\mu}{2}\int_{\mathbb{R}} b\big(a + \frac{x}{\mu}\big)|\eta(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Taking $f = H_b|_M$, we have that

$$\begin{cases} f_a = \frac{\varepsilon\alpha^2\mu}{2}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 dx, \\ f_\alpha = \frac{\pi\alpha^3\mu^3}{2} + \varepsilon\alpha\mu\int b(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 dx, \\ f_\phi = 0, \\ f_\mu = \frac{3\pi\alpha^4\mu^2}{8} + \frac{\varepsilon\alpha^2}{2}\int b(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 dx - \frac{\varepsilon\alpha^2}{2}\int b'(a+\frac{x}{\mu})\frac{x}{\mu}|\eta(x)|^2 dx. \end{cases}$$

As above, we determine the components of the Hamiltonian vector field associated to $f = H_b|_M$, and obtain that the flow of $H_b|_M$ is given by

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\alpha^2\mu}{2} - \frac{2\varepsilon}{\pi\mu}\int b'(a+\frac{x}{\mu})\frac{x}{\mu}|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\alpha} = \frac{\varepsilon\alpha}{\pi\mu}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\phi} = -\frac{\alpha^2\mu^2}{4} - \frac{\varepsilon}{\pi}\int b(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 dx - \frac{\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})\frac{x}{\mu}|\eta(x)|^2 dx, \\ \dot{\mu} = -\frac{2\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 dx. \end{cases}$$

6.4 Reparametrized evolution

Our goal is to show that the flow generated by H_b can be approximated by the effective flow of $H_b|_M$. In order to do so, we decompose the solution $u(t)$ of the Szegö equation with small Toeplitz potential (6.1.4), into a component belonging to M and a component which is symplectically orthogonal to M in the sense that :

$$u(t) = g(t) \cdot (\eta + w(t)), \quad \omega(w(t), X\eta) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{6.4.1}$$

The key point is to prove that the orthogonal component w is small.

Let us show that the above decomposition/reparametrization is indeed possible at least for short time.

Lemma 6.4.1. *For a compact subset Σ of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$ and $\gamma > 0$, denote by*

$$U_{\Sigma,\gamma} = \left\{ u \in H^{\frac{1}{2}}{}_+ ; \inf_{g \in \Sigma} \|u - g \cdot \eta\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} < \gamma \right\}.$$

a γ-tubular neighborhood of Σ.

There exists $\gamma_0 = \gamma_0(\Sigma)$ such that if $u \in U_{\Sigma,\gamma}$, with $\gamma \leq \gamma_0$, then there exists a unique element $g(u) \in \Sigma$ with the property

$$\omega(g(u)^{-1} \cdot u - \eta, X \cdot \eta) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Démonstration. Consider the function $F : H_+^{\frac{1}{2}} \times G \to \mathfrak{g}^*$,

$$F(u, h)(X) = \omega(h \cdot u - \eta, X \cdot \eta).$$

We want to solve $F(u, h) = 0$ for $h = h(u)$. We verify that the function F satisfies the hypotheses of the Implicit Function Theorem :
(i) $F(u, h)$ is of class C^1 in h,
(ii) $F(g \cdot \eta, g^{-1}) = 0$ for all $g \in G$,
(iii) $d_h F(g \cdot \eta, g^{-1}) : T_{g^{-1}} G \to \mathfrak{g}^*$ is invertible for all $g \in G$.

The first two properties can be checked directly. As for the third property, it is enough to check it for $g = e = (1, 0, 1, 0)$, the unity of the group G. Thus, since $T_e G = \mathfrak{g}$, it is enough to check that $d_h F(\eta, e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ is invertible. But
$d_h F(\eta, e) = (\omega|_M)_\eta$ which is non-degenerate because, in the basis $\{e_j \cdot \eta\}_{j=1}^4$ of $\mathfrak{g}$, it writes

$$\frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

whose determinant does not vanish. □

Thus, the orthogonal decomposition (6.4.1), with $w(t) = g(t)^{-1} \cdot u(t) - \eta$, holds as long as $u(t)$ is close enough to $M = G \cdot \eta$.

In order to find the equation that w satisfies, we need the following lemmas :

Lemma 6.4.2. *If $t \mapsto g(t) = (a(t), \alpha(t), \phi(t), \mu(t))$ is a C^1 function and $u \in \cup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(N)$, then*

$$\frac{d}{dt} g(t) \cdot u = g(t) \cdot (Y(t)u),$$

where $Y(t) = \dot{a}(t)\mu(t)e_1 + \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}e_2 + \dot{\phi}(t)e_3 + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}e_4$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} g(t) \cdot u =& \frac{d}{dt}(e^{i\phi}\alpha\mu u(\mu(x-a))) \\ =& i\dot{\phi} e^{i\phi}\alpha\mu u(\mu(x-a)) + e^{i\phi}\dot{\alpha}\mu u(\mu(x-a)) + e^{i\phi}\alpha\dot{\mu} u(\mu(x-a)) \\ &+ e^{i\phi}\alpha\mu\partial_x u(\mu(x-a))\dot{\mu}x - e^{i\phi}\alpha\mu\partial_x u(\mu(x-a))(\dot{\mu}a + \mu\dot{a}) \\ =& \dot{\phi} g \cdot (e_3 \cdot u) + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} g \cdot (e_2 \cdot u) + \frac{\dot{\mu}}{\mu} g \cdot (e_4 \cdot u) + \dot{a}\mu g \cdot (e_1 \cdot u) \\ =& g \cdot (Y(t)u).\end{aligned}$$

□

We also need Lemma 2.1 from [49], that we restate in the context of our problem.

Lemma 6.4.3. *Suppose that $g : H_+^{\frac{1}{2}} \to H_+^{\frac{1}{2}}$ is a diffeomorphism such that $g^*\omega = \rho(g)\omega$, where $\rho(g) \in C^\infty(H_+^{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}^*)$. Then, for $f \in C^\infty(H_+^{\frac{1}{2}}, \mathbb{R})$ we have that*

$$(g^{-1})_* X_f(g(\rho)) = \frac{1}{\rho(g)} X_{g^*f}(\rho), \rho \in H_+^{\frac{1}{2}}.$$

In the next proposition we determine the equation satisfied by w.

Proposition 6.4.4. *If the solution of the perturbed Szegö equation* (6.1.7) *can be reparametrized as in Lemma 6.4.1, $u(t) = g(t) \cdot (\eta + w(t))$, for all t in an interval (t_1, t_2), then w satisfies the following equation :*

$$\begin{aligned}\partial_t w =& -X\eta + \Big(- i\varepsilon\Pi\big(b(a + \frac{x}{\mu})\eta\big) + 2Be_1 \cdot \eta - Ce_2 \cdot \eta + (A+B)e_3 \cdot \eta + 2Ce_4 \cdot \eta \Big) \\ &- Xw + \Big(- i\varepsilon\Pi\big(b(a + \frac{x}{\mu})w\big) + 2Be_1 \cdot w - Ce_2 \cdot w + (A+B)e_3 \cdot w + 2Ce_4 \cdot w \Big) \\ &+ i\alpha^2\mu^2\mathcal{L}w - i\alpha^2\mu^2\mathcal{N}w,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} X &:= \big(\dot a\mu - \frac{\alpha^2\mu^2}{2} + 2B\big)e_1 + \big(\frac{\dot\alpha}{\alpha} - C\big)e_2 + \big(\dot\phi + \frac{\alpha^2\mu^2}{4} + A + B\big)e_3 \\ &\quad + \big(\frac{\dot\mu}{\mu} + 2C\big)e_4, \\ \mathcal{L}w &:= -\frac{i}{2}\partial_x w - 2T_{|\eta|^2}w - H_{\eta^2}w + \frac{1}{4}w, \\ \mathcal{N}w &:= \Pi\big(|w|^2w + |w|^2\eta + 2w\mathrm{Re}(\eta\bar w)\big), \\ A &:= \frac{\varepsilon}{\pi}\int b(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2dx, \\ B &:= \frac{\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})x|\eta(x)|^2\frac{dx}{\mu}, \\ C &:= \frac{\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2\frac{dx}{\mu}. \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Démonstration. Denote $\tilde u = w + \eta = g^{-1}u$. Then, by Lemma 6.4.2, we have that

$$\partial_t u = \partial_t(g\cdot(\eta+w)) = g\cdot Y(\eta+w) + g\cdot\partial_t w.$$

Then, Lemma 6.4.3 yields

$$\begin{aligned} \partial_t w &= -Y(\eta+w) + g^{-1}\partial_t u = -Y(\eta+w) + g^{-1}X_{H_b}(u) = -Y(\eta+w) + g^{-1}X_{H_b}(g\tilde u) \\ &= -Y(\eta+w) + \frac{1}{\alpha^2 g}X_{g^*H_b}(\tilde u). \end{aligned}$$

Since

$$(g^*H_b)(\tilde u) = H_b(g\tilde u) = \frac{\alpha^4\mu^3}{4}\int|\tilde u|^4dx + \frac{\varepsilon\alpha^2\mu}{2}\int b\big(a+\frac{x}{\mu}\big)|\tilde u|^2dx,$$

we have that

$$(X_{g^*H_b})(\tilde u) = -i\Pi\Big(\alpha^4\mu^3|\tilde u|^2\tilde u + \varepsilon\alpha^2\mu b(a+\frac{x}{\mu})\tilde u\Big)$$

and therefore,

$$\begin{aligned} \partial_t w =& -Y(\eta+w) - \frac{i}{\alpha^2\mu}\Pi\Big(\alpha^4\mu^3|\eta+w|^2(\eta+w) + \varepsilon\alpha^2\mu b\big(a+\frac{x}{\mu}\big)(\eta+w)\Big) \\ =&\Big(-Y\eta - i\varepsilon\Pi(b(a+\frac{x}{\mu})\eta)\Big) + \Big(-Yw - i\varepsilon\Pi(b(a+\frac{x}{\mu})w)\Big) \\ &- i\alpha^2\mu^2\Pi\Big(2\mathrm{Re}(\eta\bar w)\eta + |\eta|^2w\Big) \\ &- i\alpha^2\mu^2\Pi\Big(|w|^2w + 2\mathrm{Re}(\eta\bar w)w + |w|^2\eta\Big) - i\alpha^2\mu^2\Pi(|\eta|^2\eta). \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Denoting

$$X = Y + \big(-\frac{\alpha^2\mu^2}{2} + 2B\big)e_1 - Ce_2 + \big(\frac{\alpha^2\mu^2}{4} + A + B\big)e_3 + 2Ce_4, \tag{6.4.4}$$

and noticing that

$$-\frac{\alpha^2\mu^2}{2}e_1 \cdot \eta = \frac{\alpha^2\mu^2}{2}\partial_x\eta, \quad \frac{\alpha^4\mu^3}{4}e_3 \cdot \eta = \frac{i}{4}\alpha^4\mu^3\eta,$$

and similar relations hold for w, we obtain

$$\begin{aligned}
\partial_t w = &- X\eta + \Big(- i\varepsilon\Pi\big(b(a + \frac{x}{\mu})\eta\big) + 2Be_1 \cdot \eta - Ce_2 \cdot \eta + (A+B)e_3 \cdot \eta + 2Ce_4 \cdot \eta\Big) \\
&- Xw + \Big(- i\varepsilon\Pi\big(b(a + \frac{x}{\mu})w\big) + 2Be_1 \cdot w - Ce_2 \cdot w + (A+B)e_3 \cdot w + 2Ce_4 \cdot w\Big) \\
&- i\alpha^2\mu^2\Big(\Pi\big(2|\eta|^2 w + \eta^2\bar{w}\big) + \frac{i}{2}\partial_x w - \frac{w}{4}\Big) - i\alpha^2\mu^2\Big(\Pi(|\eta|^2\eta) + \frac{i}{2}\partial_x\eta - \frac{\eta}{4}\Big) \\
&- i\alpha^2\mu^2\Pi\Big(|w|^2 w + 2\mathrm{Re}(\eta\bar{w})w + |w|^2\eta\Big).
\end{aligned}$$

Equation (6.1.13) and (6.1.14) yield the conclusion. □

Remark 6.4.5. Notice that $X \equiv 0$ is equivalent to a, α, ϕ, μ satisfying the effective dynamics (6.1.9).

Lemma 6.4.6. *If the solution of the perturbed Szegö equation* (6.1.7) *can be reparametrized as in Lemma 6.4.1, $u(t) = g(t) \cdot (\eta + w(t))$ at time t, then the L^2-norm of $w(t)$ is equal to*

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 = \pi\Big(\frac{\alpha_0^2\mu_0}{\alpha^2(t)\mu(t)} - 1\Big).$$

Consequently, $\alpha^2(t)\mu(t) \leq \alpha_0^2\mu_0$.

Démonstration. By the conservation of the L^2-norm of the solution of the Szegö equation with a Toeplitz potential, we have that

$$\|\eta + w(t)\|_{L^2}^2 = \|g(t)^{-1}u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\alpha^2(t)\mu(t)}\|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{\|u(0)\|_{L^2}^2}{\alpha^2(t)\mu(t)} = \frac{\pi\alpha_0^2\mu_0}{\alpha^2(t)\mu(t)}.$$

By the orthogonality of w and η, we have that $\omega(w, X \cdot \eta) = 0$, for all $X \in \mathfrak{g}$. In particular, taking $X = e_3$, we obtain

$$\langle w, \eta\rangle = \mathrm{Re}\int w\overline{\eta}dx = -\mathrm{Im}\int w\overline{i\eta}dx = -\omega(w, e_3 \cdot \eta) = 0.$$

Then

$$\|\eta + w(t)\|_{L^2}^2 = \|\eta\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{L^2}^2 = \pi + \|w(t)\|_{L^2}^2,$$

and the conclusion follows. □

Next we define P, the symplectically orthogonal projection on the manifold of solitons M. We also give two technical lemmas concerning some properties of P.

Definition 27. *Define the projection onto $T_\eta M = \mathfrak{g} \cdot \eta \simeq \mathfrak{g}$ by*
$P : \big(\cup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(N)\big)' \to \mathfrak{g}$,

$$\omega(u - P(u)\eta, Y\eta) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Lemma 6.4.7. *Let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathfrak{g}$ obtained by using the standard $\mathbb{R}^4$ norm in the basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Then, for all $w \in H_+^{\frac{1}{2}}$ and $Y \in \mathfrak{g}$, we have*

$$\begin{aligned} &\|P(Yw)\| \leq C\|Y\|\|w\|_{L^2}, \\ &\|P(i\mathcal{N}w)\| \leq C\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^2(\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + 1). \end{aligned}$$

Démonstration. Let $P = \sum_{j=1}^4 P_j e_j$, $P_j : H_+^{-\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$. Then the definition of P yields

$$(\omega|_M)_\eta(u - \sum_{j=1}^4 P_j e_j \cdot \eta, a_1 e_1 \cdot \eta + a_2 e_2 \cdot \eta + a_3 e_3 \cdot \eta + a_4 e_4 \cdot \eta) = 0,$$

for all $a_i \in \mathbb{R}$. Then, it follows that

$$\begin{aligned} &a_1\big(\omega(u, e_1\cdot\eta) - \frac{\pi}{2}P_2 - \frac{\pi}{2}P_4\big) + a_2\big(\omega(u, e_2\cdot\eta) + \frac{\pi}{2}P_1 - \pi P_3\big) \\ &+ a_3\big(\omega(u, e_3\cdot\eta) + \pi P_2 + \frac{\pi}{2}P_4\big) + a_4\big(\omega(u, e_4\cdot\eta) + \frac{\pi}{2}P_1 - \frac{\pi}{2}P_3\big) = 0, \end{aligned}$$

for all $a_i \in \mathbb{R}$. Therefore,

$$\begin{cases} P_1(u) = \frac{2}{\pi}\Big(\omega(u, e_2\cdot\eta) - 2\omega(u, e_4\cdot\eta)\Big), \\ P_2(u) = \frac{2}{\pi}\Big(-\omega(u, e_3\cdot\eta) - \omega(u, e_1\cdot\eta)\Big), \\ P_3(u) = \frac{2}{\pi}\Big(\omega(u, e_2\cdot\eta) - \omega(u, e_4\cdot\eta)\Big), \\ P_4(u) = \frac{2}{\pi}\Big(2\omega(u, e_1\cdot\eta) + \omega(u, e_3\cdot\eta)\Big). \end{cases}$$

The conclusion follows by using the Cauchy-Schwarz inequality and integration by parts. For example, for P_1 we have

$$\begin{aligned}\|P_1(Yw)\| \leq & \Big|\int Yw\bar{\eta}\Big| + 2\Big|\int Yw\overline{\partial_x(x\eta)}\Big| \\ =& \Big|\int \big(-Y_1\partial_x w + Y_2 w + iY_3 w + Y_4\partial_x(xw)\big)\bar{\eta}dx\Big| \\ & + 2\Big|\int \big(-Y_1\partial_x w + Y_2 w + iY_3 w + Y_4\partial_x(xw)\big)\overline{\partial_x(x\eta)}dx\Big| \\ \leq & \|Y\|\Big(\Big|\int w\partial_x\bar{\eta}dx\Big| + 2\Big|\int w\bar{\eta}dx\Big| + \Big|\int xw\partial_x\bar{\eta}dx\Big| + 2\Big|\int w\partial_x^2(x\bar{\eta})dx\Big| \\ & + 4\Big|\int w\partial_x(x\bar{\eta})dx\Big| + 2\Big|\int xw\partial_x^2(x\bar{\eta})dx\Big|\Big) \\ \leq & C\|Y\|\|w\|_{L^2}\big(\|\partial_x\eta\|_{L^2} + \|\eta\|_{L^2} + \|x\partial_x\eta\|_{L^2} + \|\partial_x^2(x\eta)\|_{L^2} + \|x\partial_x^2(x\eta)\|_{L^2}\big) \\ \leq & C\|Y\|\|w\|_{L^2}.\end{aligned}$$

By using the Sobolev embedding $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ for all $2 \leq p < \infty$, we have

$$\begin{aligned}\|P_1(i\mathcal{N}w)\| =& \|\omega(i\mathcal{N}w, \eta) - 2\omega(i\mathcal{N}w, \partial_x(x\eta))\| \\ \leq & \Big|\int |w|^2 w\bar{\eta}dx + \int |w|^2|\eta|^2 dx + 2\int w\mathrm{Re}(\eta\bar{w})\bar{\eta}dx\Big| \\ & + 2\Big|\int |w|^2 w\partial_x(x\bar{\eta})dx + \int |w|^2\eta\partial_x(x\bar{\eta})dx + 2\int w\mathrm{Re}(\eta\bar{w})\partial_x(x\bar{\eta})dx\Big| \\ \leq & C(\|w^2\|_{L^2} + \|w^3\|_{L^2}) \leq C\|w\|_{L^4}(\|w\|_{L^4} + \|w\|_{L^8}^2) \leq \|w\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}}(\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + 1).\end{aligned}$$

□

Lemma 6.4.8. *If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function of class C^1 such that $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ and $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, then*

$$\begin{aligned}P(\Pi(if\eta)) =& \frac{2}{\pi}\Big(\int f'(x)x|\eta(x)|^2dx\Big)e_1 - \frac{1}{\pi}\Big(\int f'(x)|\eta(x)|^2dx\Big)e_2 \\ & + \frac{1}{\pi}\Big(\int f(x)|\eta(x)|^2dx + \int f'(x)x|\eta(x)|^2dx\Big)e_3 + \frac{2}{\pi}\Big(\int f'(x)|\eta(x)|^2dx\Big)e_4.\end{aligned}$$

Démonstration. Let $Y = \sum_{j=1}^4 a_j e_j$ be an arbitrary vector in $\mathfrak{g}$. Then, integrating by parts we have

$$\begin{aligned}
\omega(\Pi(if\eta), Y\cdot\eta) &= \omega(if\eta, a_1e_1\cdot\eta + a_2e_2\cdot\eta + a_3e_3\cdot\eta + a_4e_4\cdot\eta)\\
&= \mathrm{Im}\Big(- a_1\int if\eta\partial_x\bar\eta dx + a_2\int if\eta\bar\eta dx\\
&\qquad + a_3\int if\eta(-i)\bar\eta dx + a_4\int if\eta\partial_x(x\bar\eta)dx\Big)\\
&= -\frac{a_1}{2}\int f\partial_x(|\eta|^2)dx + a_2\int f|\eta|^2dx + a_4\mathrm{Re}\int f(x)\eta(x)\big(\bar\eta(x) + x\partial_x\bar\eta(x)\big)dx\\
&= \frac{a_1}{2}\int f'|\eta|^2dx + (a_2+a_4)\int f|\eta|^2dx - \frac{a_4}{2}\int \big(xf'(x)+f(x)\big)|\eta(x)|^2dx\\
&= \frac{a_1}{2}\int f'|\eta|^2dx + (a_2+\frac{a_4}{2})\int f|\eta|^2dx - \frac{a_4}{2}\int f'(x)x|\eta(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

Using the formula for $(\omega|_M)_\eta$ we have

$$\begin{aligned}
&\omega\Big(\frac{2}{\pi}\Big(\int f'(x)x|\eta(x)|^2dx\Big)e_1\cdot\eta - \frac{1}{\pi}\Big(\int f'(x)|\eta(x)|^2dx\Big)e_2\cdot\eta\\
&+\frac{1}{\pi}\Big(\int f(x)|\eta(x)|^2dx + \int f'(x)x|\eta(x)|^2dx\Big)e_3\cdot\eta + \frac{2}{\pi}\Big(\int f'(x)|\eta(x)|^2dx\Big)e_4\cdot\eta, Y\cdot\eta\Big)\\
&= \frac{a_1}{2}\int f'|\eta|^2dx + (a_2+\frac{a_4}{2})\int f|\eta|^2dx - \frac{a_4}{2}\int f'(x)x|\eta(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

By the definition of the projection P, the conclusion follows. □

Lemma 6.4.9.

$$P\Big(- i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})\eta\big) + 2Be_1\cdot\eta - Ce_2\cdot\eta + (A+B)e_3\cdot\eta + 2Ce_4\cdot\eta\Big) = 0.$$

Démonstration. Take $f(x) = \varepsilon b(a+\frac{x}{\mu})$ in the above lemma. □

Remark 6.4.10. Lemma 6.4.9 and equation (6.4.4) show that

$$P\Big(- Y\eta - i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})\eta\big)\Big) = -X - \frac{\alpha^2\mu^2}{2}e_1 + \frac{\alpha^2\mu^2}{4}e_3.$$

Thus, X is the orthogonal projection on the manifold of solitons of a significant term of the right-hand side of the equation (6.4.3) satisfied by w.

In the following we intend to give an estimate for $\|X\|$. We need the following definition and Lemma that we cite from [49, Lemma 2.2].

Let $f \in C^\infty(H_+^{\frac{1}{2}}, \mathbb{R})$ and suppose $df(\rho_0) = 0$. Then the Hessian of f at ρ_0 is well defined $f''(\rho_0) : T_{\rho_0} H_+^{\frac{1}{2}} \to T^*_{\rho_0} H_+^{\frac{1}{2}}$. We identify $T_{\rho_0} H_+^{\frac{1}{2}}$ and $T^*_{\rho_0} H_+^{\frac{1}{2}}$ using the inner product and we define the *Hamiltonian map* $F : T_{\rho_0} H_+^{\frac{1}{2}} \to T_{\rho_0} H_+^{\frac{1}{2}}$ by

$$F = -if''(\rho_0), \quad \langle f''(\rho_0)X, Y\rangle = \omega(Y, FX).$$

Lemma 6.4.11. *Let $N \subset H_+^{\frac{1}{2}}$ be a finite-dimensional symplectic submanifold of $H_+^{\frac{1}{2}}$ and let $f \in C^\infty(H_+^{\frac{1}{2}}, \mathbb{R})$ such that*

$$X_f(\rho) \in T_\rho N \subset T_\rho H_+^{\frac{1}{2}}, \rho \in N.$$

If $\rho_0 \in N$ and $df(\rho_0) = 0$, then the Hamiltonian map satisfies

$$F(T_\rho N) \subset T_\rho N.$$

Lemma 6.4.12. *If the solution of the perturbed Szegö equation* (6.1.7) *can be reparametrized as in Lemma 6.4.1, $u(t) = g(t) \cdot (\eta + w(t))$, for all t in an interval (t_1, t_2), $\|w(t)\|_{L^2}$ is small enough, and $\frac{\mu_0}{2} \le \mu(t) \le \frac{3\mu_0}{2}$, then the vector X defined by*

$$X = \big(\dot{a}\mu - \frac{\alpha^2\mu^2}{2} + 2B\big)e_1 + \big(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - C\big)e_2 + \big(\dot{\phi} + \frac{\alpha^2\mu^2}{4} + A + B\big)e_3 + \big(\frac{\dot{\mu}}{\mu} + 2C\big)e_4,$$

where the expressions of A, B, C can be found in equation (6.4.2), *satisfies the inequality*

$$\|X\| \le C(\varepsilon\|w\|_{L^2} + \|w\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}} + \|w\|^3_{H_+^{\frac{1}{2}}}).$$

Remark 6.4.13. Lemma 6.4.12 yields that if $\|w\|_{H_+^{1/2}}$ is small, then $\|X\|$ is also small. On the other hand, we noticed in Remark 6.4.5 that $\|X\|$ measures how far a, α, ϕ, μ are from the effective dynamics (6.1.9). Thus, the Lemma 6.4.12 shows that if one can prove that w, the part of the flow which is orthogonal to the manifold of solitons, is small, then a, α, ϕ, μ are perturbations of the effective dynamics.

Démonstration. Note first that $P(Y \cdot \eta) = Y$, for all $Y \in \mathfrak{g}$.

Since $\omega(w, Y \cdot \eta) = 0$, for all $Y \in \mathfrak{g}$, it follows that $Pw = 0$ and $P\partial_t w = \partial_t Pw = 0$. Then, by Proposition 6.4.4 and Lemma 6.4.9, we have

$$\begin{aligned} 0 = &- X - P(Xw) + \alpha^2\mu^2 P(i\mathcal{L}w) - \alpha^2\mu^2 P(i\mathcal{N}w) \\ &+ P\Big(- i\varepsilon\Pi(b(a + \frac{x}{\mu})w) + 2Be_1 \cdot w - Ce_2 \cdot w + (A + B)e_3 \cdot w + 2Ce_4 \cdot w\Big). \end{aligned}$$

By Lemma 6.4.7, we have that

$$\|P(Xw)\| \leq c\|X\|\|w\|_{L^2},$$
$$\|P(i\mathcal{N}w)\| \leq c\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+}(\|w\|_{H^{\frac{1}{2}}_+}+1).$$

We prove that $P(-i\mathcal{L}w)=0$. For $\mathcal{E}$ defined by equation (6.1.12), we have that $X_{\mathcal{E}}$ is tangent to M, which corresponds to the fact that if the initial data is in M, then the flow of H_0 stays in M. Then,

$$(X_{\mathcal{E}})_{g\cdot\eta} \subset T_{g\cdot\eta}M \subset T_{g\cdot\eta}H^{\frac{1}{2}}_+.$$

Then, by Lemma 6.4.11, we have that the Hamiltonian map of $\mathcal{E}$, $-i\mathcal{L}$, satisfies

$$(-i\mathcal{L})(T_\eta M) \subset T_\eta M.$$

Then, since w is orthogonal to $T_\eta M = \mathfrak{g}\cdot\eta$ and $T_{|\eta|^2}$, H_{η^2} are symmetric with respect to the real scalar product, we obtain that

$$\begin{aligned}\omega(-i\mathcal{L}w, X\cdot\eta) &= \mathrm{Im}\int -i\mathcal{L}w\overline{X\cdot\eta}dx = -\mathrm{Re}\int \mathcal{L}w\overline{X\cdot\eta}dx = -\langle \mathcal{L}w, X\cdot\eta\rangle \\ &= -\langle w, \mathcal{L}(X\cdot\eta)\rangle = \mathrm{Im}\int w\overline{-i\mathcal{L}(X\cdot\eta)}dx = \omega\big(w, (-i\mathcal{L})(X\cdot\eta)\big) = 0.\end{aligned}$$

For the last term, we first notice that we have

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{\varepsilon}{\pi}\Big|\int b(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2dx\Big| \leq c\varepsilon\|b\|_{L^\infty}\|\eta\|^2_{L^2} \leq c\varepsilon, \\ |B| &= \frac{\varepsilon}{\pi}\Big|\int b'(a+\frac{x}{\mu})x|\eta(x)|^2\frac{dx}{\mu}\Big| \leq c\varepsilon\|b'\|_{L^1}\|x\eta^2(x)\|_{L^\infty} \leq c\varepsilon, \\ |C| &= \frac{\varepsilon}{\pi}\Big|\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2\frac{dx}{\mu}\Big| \leq c\varepsilon\|b'\|_{L^1}\|\eta\|^2_{L^\infty} \leq c\varepsilon.\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Using the expression of P we found in the proof of Lemma 6.4.7, we obtain that

$$\begin{aligned}&\Big\|P\Big(-i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})w\big)+2Be_1\cdot w - Ce_2\cdot w + (A+B)e_3\cdot w + 2Ce_4\cdot w\Big)\Big\| \\ &\leq c\varepsilon\|w\|_{L^2}.\end{aligned}$$

By Lemma 6.4.6 we have that $\alpha^2\mu \leq \alpha_0^2\mu_0$, and thus we have

$$\|X\| \leq c(\|X\|\|w\|_{L^2} + \mu\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+} + \mu\|w\|^3_{H^{\frac{1}{2}}_+}) + c\varepsilon\|w\|_{L^2}.$$

If $\|w\|_{L^2}$ is small enough so that $c\|w\|_{L^2} < 1$, then we write

$$(1-c\|w\|_{L^2})\|X\| \leq c(\varepsilon\|w\|_{L^2} + \mu\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+} + \mu\|w\|^3_{H^{\frac{1}{2}}_+}),$$

To conclude, we use the fact that $\mu(t) \leq \frac{3\mu_0}{2}$. □

6.5 Coerciveness of the linearized operator $\mathcal{L}$

In this section we prove that the linearized operator $\mathcal{L}$, defined by equation (6.1.14), is coercive in directions which are symplectically orthogonal to the manifold of solitons M.

Lemma 6.5.1. *For all $f \in \mathrm{Ker}(H_{\eta^2}) \cap H^{\frac{1}{2}}_+$, we have that*

$$\langle \mathcal{L}(f), f\rangle \geq \frac{1}{4}\|f\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+}.$$

Démonstration. Since $\eta(x) = \frac{1}{x+i}$, we have that $\mathrm{Ker}(H_{\eta^2}) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^2 L^2_+$. Let $f \in \mathrm{Ker}(H_{\eta^2}) \cap H^{\frac{1}{2}}_+$, $f = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^2 h$, where $h \in H^{\frac{1}{2}}_+$. Then

$$T_{|\eta|^2} f = \Pi\Big(\frac{1}{(x+i)(x-i)}(\frac{x-i}{x+i})^2 h\Big) = \Pi\Big(\frac{x-i}{(x+i)^3}h\Big) = \frac{x-i}{(x+i)^3}h$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= -\frac{i}{2}\partial_x f - 2T_{|\eta|^2}f - H_{\eta^2}f + \frac{1}{4}f \\
&= 2\frac{x-i}{(x+i)^3}h - \frac{i}{2}\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^2\partial_x h - 2\frac{x-i}{(x+i)^3}h + \frac{1}{4}\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^2 h \\
&= \Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^2(-\frac{i}{2}\partial_x h + \frac{1}{4}h),
\end{aligned}$$

and thus, using $|\frac{x-i}{x+i}| = 1$ and the Plancherel identity, we obtain

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}(f), f\rangle &= \langle\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^2(-\frac{i}{2}\partial_x h + \frac{1}{4}h), \Big(\frac{x-i}{x+i}\Big)^2 h\rangle = \langle -\frac{i}{2}\partial_x h + \frac{1}{4}h, h\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \xi|\hat{h}(\xi)|d\xi + \frac{1}{4}\|f\|^2_{L^2} \geq \frac{1}{4}\|f\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+}.
\end{aligned}$$

□

In what follows we need a Kronecker-type theorem characterizing the Hankel operators of finite rank. We state this theorem bellow. For the proof we refer to [75].

Theorem 6.5.2 ([75])**.** *The Hankel operator H_u has finite rank N if and only if u is a rational function which belongs to $\mathcal{M}(N)$, where*

$$\mathcal{M}(N) = \left\{\frac{A(z)}{B(z)} \in L^2_+ \,\Big|\, \deg(B) = N,\ \deg(A) \leq N-1,\ B(0) = 1,\ p.g.c.d.(A, B) = 1\right\}.$$

Moreover, if $u \in \mathcal{M}(N)$, $u(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, *where* $B(z) = \prod_{j=1}^{J}(z-p_j)^{m_j}$, *with* $\sum_{j=1}^{J} m_j = N$ *and* $\mathrm{Im} p_j < 0$ *for all* $j = 1, 2, ..., J$, *then the range of* H_u *is given by*

$$\mathrm{Ran}\, H_u = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{(z-p_j)^m}, 1 \leq m \leq m_j\right\}_{j=1}^{J}$$

Proposition 6.5.3. *If* $w \in H_+^{\frac{1}{2}}$ *is such that* $\omega(w, X\cdot\eta) = 0$, *for all* $X \in \mathfrak{g}$, *then*

$$\langle \mathcal{L}w, w\rangle \geq \frac{1}{4}\|w\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}}.$$

Démonstration. By the Kronecker-type theorem, we have that the range $\mathrm{Ran}\, H_{\eta^2}$ is generated by all the fractions having as a numerator a complex number and as a denominator a factor of η^2. More precisely,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ran}(H_{\eta^2}) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{x+i}, \frac{i}{x+i}, \frac{1}{(x+i)^2}, \frac{i}{(x+i)^2}\right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\eta, i\eta, -i\partial_x\eta, i\partial_x(x\eta)\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{ie_1\cdot\eta, ie_2\cdot\eta, ie_3\cdot\eta, ie_4\cdot\eta\}.\end{aligned}$$

On the other hand, we have that $\omega(w, X\cdot\eta) = 0$ for all $X \in \mathfrak{g}$, which is equivalent to

$$0 = \omega(w, e_j\cdot\eta) = \mathrm{Im}\int w\overline{e_j\cdot\eta}dx = \mathrm{Re}\int w\overline{ie_j\cdot\eta}dx = \langle w, ie_j\cdot\eta\rangle,$$

for $j = 1, 2, 3, 4$. Thus w belongs to the orthogonal of $\mathrm{Ran}(H_{\eta^2})$ with respect to the real scalar product. Since H_{η^2} is $\mathbb{C}$-antilinear, w belongs also to the orthogonal with respect to the Hermitian inner product in L^2, which is $\mathrm{Ker}(H_{\eta^2})$. Hence $w \in \mathrm{Ker}(H_{\eta^2}) \cap H_+^{\frac{1}{2}}$. By Lemma 6.5.1, the conclusion then follows. □

6.6 Main estimates

In this section we estimate w, the part of the flow which is symplectically orthogonal to the manifold of solitons, and prove that it is small.

Lemma 6.6.1. *If the solution of the perturbed Szegö equation* (6.1.7) *can be reparametrized as in Lemma 6.4.1,* $u(t) = g(t)\cdot(\eta + w(t))$ *on a time interval* (t_1, t_2), $\frac{\mu_0}{2} \leq \mu(t) \leq \frac{\mu_0}{2}$, *and* $w(t)$ *is small enough in the* $H_+^{\frac{1}{2}}$*-norm, then the following estimate holds*

$$\frac{1}{2}\left|\partial_t\langle\mathcal{L}w, w\rangle\right| \leq c\varepsilon\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c\varepsilon\|w\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c\|w\|^3_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c\|w\|^5_{H_+^{\frac{1}{2}}},$$

where c *is a constant depending on* α_0 *and* μ_0.

Démonstration. We have that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\langle \mathcal{L}w, w\rangle = \langle \mathcal{L}w, \partial_t w\rangle\\
=&\langle \mathcal{L}w, -X\eta\rangle\\
&+\langle \mathcal{L}w, -i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})\eta\big)+2Be_1\cdot\eta - Ce_2\cdot\eta+(A+B)e_3\cdot\eta+2Ce_4\cdot\eta\rangle\\
&+\langle \mathcal{L}w, -Xw\rangle\\
&+\langle \mathcal{L}w, -i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})w\big)+2Be_1\cdot w - Ce_2\cdot w+(A+B)e_3\cdot w+2Ce_4\cdot w)\rangle\\
&+\langle \mathcal{L}w, i\alpha^2\mu^2\mathcal{L}w\rangle - \langle \mathcal{L}w, i\alpha^2\mu^2\mathcal{N}w\rangle\\
=&\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}+\mathrm{VI}\end{aligned}$$

and we will estimate each of the six terms. The challenge is to deal with the terms containing $\partial_x w$ since we only have $w \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. In what follows we focus on such terms, the rest of the terms being easier to handle.

We set $X = \sum_{j=1}^4 a_j e_j$. By Lemma 6.4.12, we have that

$$|a_j| \leq c(\varepsilon\|w\|_{L^2} + \|w\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}} + \|w\|^3_{H_+^{\frac{1}{2}}}).$$

For I, we integrate by parts

$$\mathrm{Re}\Big(\bar{a}_1\int \frac{i}{2}\partial_x w\overline{e_1\cdot\eta}dx\Big) = \mathrm{Re}\Big(\bar{a}_1\int\frac{i}{2}w\partial_x^2\bar{\eta}dx\Big)$$

and apply the Cauchy-Schwarz inequality for each term. We obtain

$$|\mathrm{I}| \leq c\|X\|\|w\|_{L^2} \leq c(\varepsilon\|w\|^2_{L^2} + \|w\|^3_{H_+^{\frac{1}{2}}} + \|w\|^4_{H_+^{\frac{1}{2}}}).$$

For II, integrating by parts and using Cauchy-Schwarz, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big(\int\frac{i}{2}\partial_x w\cdot\overline{i\varepsilon b(a+\frac{x}{\mu})}\bar{\eta}dx\Big) &= \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{Re}\Big(\int w\overline{b'(a+\frac{x}{\mu})}\frac{1}{\mu}\bar{\eta}dx + \int w\overline{b(a+\frac{x}{\mu})}\bar{\eta}'dx\Big)\\
&\leq c\varepsilon\|w\|_{L^2}\|\eta\|_{L^\infty}\|b'\|_{L^2}\frac{\mu^{1/2}}{\mu} + c\varepsilon\|w\|_{L^2}\|\eta'\|_{L^2}\|b\|_{L^\infty}\\
&\leq c\varepsilon(1+\frac{1}{\mu^{1/2}})\|w\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Using the equation (6.4.5) for the rest of the terms, we obtain

$$|\mathrm{II}| \leq c\varepsilon\|w\|_{L^2}.$$

For III and IV we analyze each term. Besides integrating by parts and using Cauchy-Schwarz or Hölder inequalities, a key ingredient is the fact that we deal with the real scalar product.

$$\begin{aligned}\mathrm{III} = \langle \mathcal{L}w, -Xw\rangle = \mathrm{Re}\Big(&\sum_{j=1}^{4} a_j \int \frac{i}{2}\partial_x w\overline{e_j\cdot w}dx + 2\sum_{j=1}^{4} a_j \int |\eta|^2 w\overline{e_j\cdot w}dx \\ &+ \sum_{j=1}^{4} a_j \int \eta^2 \overline{w e_j\cdot w}dx - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} a_j \int w\overline{e_j\cdot w}dx\Big) = \text{(i)} + \text{(ii)} + \text{(iii)} + \text{(iv)}.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\text{(i)} &= \mathrm{Re}\Big(- a_1\frac{i}{2}\int |\partial_x w|^2 + a_2\frac{i}{2}\int \partial_x w\overline{w}dx + \frac{a_3}{4}\int \partial_x(|w|^2)dx \\ &\qquad + a_4\frac{i}{2}\int \partial_x w\overline{w}dx + a_4\frac{i}{2}\int x|\partial_x w|^2dx\Big) \\ &= -\frac{a_2+a_4}{2}\int \frac{1}{i}\partial_x w\overline{w}dx = -\frac{a_2+a_4}{2}\int_0^\infty \xi|\hat{w}(\xi)|^2 d\xi \\ &= -\frac{a_2+a_4}{2}\|w\|^2_{\dot{H}^{1/2}_+} \le \|X\|\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+},\end{aligned}$$

by the Hölder inequality we have

$$\begin{aligned}\text{(ii)} &= 2\mathrm{Re}\Big(- a_1\int |\eta|^2 w\partial_x\overline{w}dx + a_2\int |\eta|^2|w|^2dx - a_3 i\int |\eta|^2|w|^2dx \\ &\qquad + a_4\int |\eta|^2|w|^2dx + a_4\int |\eta|^2 xw\partial_x\overline{w}dx\Big) \\ &= -a_1\int |\eta|^2\partial_x(|w|^2)dx + 2(a_2+a_4)\int |\eta|^2|w|^2dx + a_4\int |\eta|^2 x\partial_x(|w|^2)dx \\ &\le c\|X\|\|w\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

similarly

$$\begin{aligned}\text{(iii)} &= \mathrm{Re}\Big(- \frac{a_1}{2}\int \eta^2\partial_x(\overline{w}^2)dx + a_2\int \eta^2\overline{w}^2dx - a_3 i\int \eta^2\overline{w}^2dx \\ &\qquad + a_4\int \eta^2\overline{w}^2dx + \frac{a_4}{2}\int \eta^2 x\partial_x(\overline{w}^2)dx\Big) \\ &\le c\|X\|\|w\|^2_{L^2},\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
\text{(iv)} =& -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\Big(-a_1\int w\partial_x\overline{w}dx + a_2\int |w|^2dx - a_3 i\int |w|^2dx \\
&\qquad + a_4\int |w|^2dx + \frac{a_4}{2}\int xw\partial_x\overline{w}dx\Big) \\
=& -\frac{1}{4}\Big(-\frac{a_1}{2}\int \partial_x(|w|^2)dx + (a_2+a_4)\int |w|^2dx + \frac{a_4}{2}\int x\partial_x(|w|^2)dx\Big) \\
=& -\frac{1}{4}(a_2+\frac{a_4}{2})\int |w|^2dx \le c\|X\|\|w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Hence

$$
|\mathrm{III}| \le c\|X\|\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+} \le c(\varepsilon\|w\|^3_{H^{\frac{1}{2}}_+} + \|w\|^4_{H^{\frac{1}{2}}_+} + \|w\|^5_{H^{\frac{1}{2}}_+}).
$$

For IV we have

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV} =& \mathrm{Re}\int \frac{i}{2}\partial_x w\Big(i\varepsilon b(a+\frac{x}{\mu})\bar{w} + 2B\overline{e_1\cdot w} - C\overline{e_2\cdot w} + (A+B)\overline{e_3\cdot w} + 2C\overline{e_4\cdot w}\Big)dx \\
&+ 2\mathrm{Re}\int |\eta|^2 w\Big(\overline{i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})w\big)} + 2B\overline{e_1\cdot w} - C\overline{e_2\cdot w} + (A+B)\overline{e_3\cdot w} + 2C\overline{e_4\cdot w}\Big)dx \\
&+ \mathrm{Re}\int \eta^2\bar{w}\Big(\overline{i\varepsilon\Pi\big(b(a+\frac{x}{\mu})w\big)} + 2B\overline{e_1\cdot w} - C\overline{e_2\cdot w} + (A+B)\overline{e_3\cdot w} + 2C\overline{e_4\cdot w}\Big)dx \\
&- \frac{1}{4}\mathrm{Re}\int w\Big(i\varepsilon b(a+\frac{x}{\mu})\bar{w} + 2B\overline{e_1\cdot w} - C\overline{e_2\cdot w} + (A+B)\overline{e_3\cdot w} + 2C\overline{e_4\cdot w}\Big)dx \\
=& \text{(i)}+\text{(ii)}+\text{(iii)}+\text{(iv)}.
\end{aligned}
$$

By the equations (6.4.5) and the Sobolev embedding $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, $2 \le p < \infty$, we have

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} =& -\frac{1}{4}\int \varepsilon b(a+\frac{x}{\mu})\partial_x(|w|^2)dx - B\mathrm{Re}\int i|\partial_x w|^2dx - \frac{C}{2}\mathrm{Re}\int i\partial_x w\overline{w}dx \\
&+ \frac{A+B}{4}\int \partial_x(|w|^2)dx + C\mathrm{Re}\int i\partial_x w\overline{w}dx \\
=& \frac{\varepsilon}{4\mu}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|w|^2dx - \frac{C}{2}\|w\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}_+} \le \frac{c\varepsilon}{\mu^{1/2}}\|b'\|_{L^2}\|w\|^2_{L^4} + c\varepsilon\|w\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}_+} \\
\le& c\varepsilon\big(1+\frac{1}{\mu^{1/2}}\big)\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+},
\end{aligned}
$$

For (ii) we only analyze the terms containing $\partial_x w$. By the equations (6.4.5), we obtain

$$\begin{aligned}
&-4B\mathrm{Re}\int |\eta|^2 w\partial_x\overline{w}dx + 4C\mathrm{Re}\int |\eta|^2 xw\partial_x\overline{w}dx \\
&= -2B\int |\eta|^2\partial_x(|w|^2)dx + 2C\int |\eta|^2 x\partial_x(|w|^2)dx \\
&= 2B\int \partial_x(|\eta|^2)|w|^2dx - 2C\int \partial_x(|\eta|^2 x)|w|^2dx \\
&\leq c\varepsilon\|w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Thus

$$\text{(ii)} \leq c\varepsilon(1+\frac{1}{\mu^{1/2}})\|w\|_{L^2}^2$$

and similarly we obtain the same bound for (iii). Computing the last term, we obtain that (iv)=0. Hence

$$|\mathrm{IV}| \leq c\varepsilon(1+\frac{1}{\mu^{1/2}})\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^2.$$

Since we work with the real scalar product, it follows immediately that V=0. For VI again we only analyze the terms containing $\partial_x w$. The important step is to group together $w\overline{\eta}+\bar{w}\eta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&-\alpha^2\mu^2\langle\frac{i}{2}\partial_x w, i(|w|^2w + 2|w|^2\eta + w^2\overline{\eta})\rangle \\
&= -\alpha^2\mu^2\Big(\frac{1}{4}\int |w|^2\partial_x(|w|^2))dx + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int |w|^2\partial_x w\overline{\eta}dx + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int \partial_x w\overline{w}(w\overline{\eta}+\overline{w}\eta)dx\Big) \\
&= -\alpha^2\mu^2\Big(\frac{1}{8}\int \partial_x(|w|^4)dx + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int |w|^2\partial_x w\overline{\eta}dx + \frac{1}{2}\int \partial_x(|w|^2)2\mathrm{Re}(w\overline{\eta})dx\Big) \\
&= -\alpha^2\mu^2\Big(\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int |w|^2\partial_x w\overline{\eta}dx - \frac{1}{2}\int |w|^2 2\mathrm{Re}(\overline{\eta}\partial_x w + w\partial_x\overline{\eta})dx\Big) \\
&= \alpha^2\mu^2\mathrm{Re}\int |w|^2 w\partial_x\overline{\eta}dx \leq c\alpha^2\mu^2\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^3.
\end{aligned}$$

For the other terms it is enough to apply the Cauchy-Schwarz and Sobolev inequalities. Using Lemma 6.4.6 we obtain

$$|\mathrm{VI}| \leq c\alpha^2\mu^2(\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^3 + \|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^4) \leq c\alpha_0^2\mu_0\mu(\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^3 + \|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}^4).$$

□

In the following, we combine the inequality in Lemma 6.6.1 with the coerciveness properties of the linearized operator $\mathcal{L}$, to obtain an estimate for $\|w\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}$.

Proposition 6.6.2. *Suppose the solution of the perturbed Szegö equation* (6.1.7) *can be reparametrized as in Lemma 6.4.1, $u(t) = g(t)\cdot(\eta + w(t))$ on a time interval $[t_1, t_2]$ and $\frac{\mu_0}{2} \le \mu(t) \le \frac{\mu_0}{2}$. Let $0 < \varepsilon \ll 1$ and $0 < \delta < \frac{1}{2}$. If $|t_2 - t_1| \le \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}$ and*

$$\|w\|_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \le \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

then

$$\|w\|_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \le c_0\|w(t_1)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c_0\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}},$$

where $c_0 > 2$ is a constant depending only on α_0 and μ_0.

Démonstration. Integrating from t_1 to t_2 the estimate in Lemma 6.6.1, we have that

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}w(t_2), w(t_2)\rangle \le & \langle \mathcal{L}w(t_1), w(t_1)\rangle + c(t_2-t_1)\varepsilon\|w\|_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \\ & + c(t_2-t_1)\varepsilon\|w\|^2_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} + c(t_2-t_1)\|w\|^3_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \\ & + c(t_2-t_1)\|w\|^4_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} + (t_2-t_1)\|w\|^5_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})}.\end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}w(t_1), w(t_1)\rangle = & \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int \frac{1}{i}\partial_x w(t_1)\overline{w}(t_1)dx - 2\int |\eta|^2|w(t_1)|^2 dx \\ & - \mathrm{Re}\int \eta^2\overline{w}(t_1)^2 dx + \frac{1}{4}\int |w(t_1)|^2 dx \\ \le & \frac{1}{2}\|w(t_1)\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}} + 2\|\eta\|^2_{L^\infty}\|w(t_1)\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^\infty}\|w(t_1)\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}\|w(t_1)\|^2_{L^2} \\ \le & 4\|w(t_1)\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Together with the coerciveness of the linearized operator $\mathcal{L}$ in Proposition 6.5.3, this yields

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|w\|^2_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \le & 4\|w(t_1)\|^2_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c(t_2-t_1)\varepsilon\|w\|_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \\ & + c(t_2-t_1)\varepsilon\|w\|^2_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} + c(t_2-t_1)\|w\|^3_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})} \\ & + c(t_2-t_1)\|w\|^5_{L^\infty([t_1,t_2],H_+^{\frac{1}{2}})}.\end{aligned}$$

Since $c(t_2 - t_1)\varepsilon = c\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} < \frac{1}{8}$ we can pass the term $c(t_2 - t_1)\varepsilon\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+}$ to the left hand-side of the inequality and with the estimates in the hypothesis we obtain

$$\frac{1}{8}\|w\|^2_{L^\infty([t_1,t_2],H^{\frac{1}{2}}_+)} \leq 4\|w(t_1)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_+} + 3c\varepsilon^{1+\delta}.$$

This gives us the conclusion with the constant $c_0 = \max(32, 24c)$ depending only on α_0, μ_0. $\square$

The proposition below is the main step in proving Theorem 6.1.1.

Proposition 6.6.3. *Let Σ be a compact subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^*_+$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, and let $\varepsilon > 0$ be such that $\varepsilon^{\frac{1}{2}} < \gamma_0$, where γ_0 was defined in Lemma 6.4.1. Suppose $\inf_{g\in\Sigma} \|u(0) - g \cdot \eta\|_{H^{\frac{1}{2}}_+} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}$. Then, for all*

$$0 < t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon}),$$

the solution of the perturbed Szegö equation (6.1.7) *at time t can be parameterized as in Lemma 6.4.1, $u(t) = g(t)(\eta + w(t))$. Moreover, we have*

$$\|w\|_{L^\infty([0,t],H^{\frac{1}{2}}_+)} \leq \varepsilon^{-\frac{\delta}{6}}\|w(0)\|_{H^{\frac{1}{2}}_+} + \varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}} \tag{6.6.1}$$

and

$$\frac{\mu_0}{2} \leq \mu(t) \leq \frac{3\mu_0}{2}.$$

Démonstration. We use a bootstrap argument. Set

$$T := \sup\Big\{t > 0 \Big| \inf_{g\in\Sigma} \|u(t) - g \cdot \eta\|_{L^\infty([0,t],H^{1/2}_+)} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{\mu_0}{2} \leq \mu(t) \leq \frac{3\mu_0}{2}\Big\}. \tag{6.6.2}$$

We intend to show that $T \geq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Suppose by contradiction that

$$T < \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Since $\inf_{g\in\Sigma} \|u(t) - g(t) \cdot \eta\|_{L^\infty([0,t],H^{1/2}_+)} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} < \gamma_0$ for all $0 < t < T$, it follows by Lemma 6.4.1 that the solution of the perturbed Szegö equation (6.1.7) can be reparametrized as $u(t) = g(t) \cdot (\eta + w(t))$ for all $0 < t < T$, and moreover

$\|w(t)\|_{L^\infty([0,t],H_+^{1/2})} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. We apply the Proposition 6.6.2 successively on the intervals $[0, \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}]$, $[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}, \frac{2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}]$,..., $[\frac{k-1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}, \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}]$. For t in the interval $[0, \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}]$, we obtain

$$\|w(t)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} \leq c_0\|w(0)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c_0\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

Using this information for $t = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}$, we obtain for $t \in [\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}, \frac{2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}]$ that

$$\|w(t)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} \leq c_0^2\|w(0)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c_0(1+c_0)\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

Ultimately, we have that for all $t \in [0, \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}]$

$$\|w(t)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} \leq c_0^k\|w(0)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c_0(\sum_{j=0}^{k-1} c_0^j)\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}} = c_0^k\|w(0)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + c_0\frac{c_0^k-1}{c_0-1}\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

Since $c_0 > 2$, we have that $c_0\frac{c_0^k-1}{c_0-1} \leq 2c_0^k$. Take k such that $c_0^k = \varepsilon^{-\frac{\delta}{6}}$, which is equivalent to

$$k = \frac{\delta}{6\ln c_0}\ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Then,

$$\|w\|_{L^\infty([0,\frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}],H_+^{\frac{1}{2}})} \leq \varepsilon^{-\frac{\delta}{6}}\|w(0)\|_{H_+^{\frac{1}{2}}} + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}} \leq 3\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}.$$

Therefore, we have for $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}\ln(\frac{1}{\varepsilon})$ that

$$\|w(t)\|_{L^\infty([0,t],H_+^{\frac{1}{2}})} \leq 3\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}, \tag{6.6.3}$$

and by Lemma 6.4.12 it follows that

$$\|X\| \leq c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}.$$

By the definition of X (6.4.2), it follows that

$$\left|\frac{\dot{\mu}}{\mu} + 2C\right| \leq c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}.$$

Thus

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \leq -\frac{2\varepsilon}{\pi}\int b'(a+\frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2\frac{dx}{\mu} + c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}.$$

Integrating from 0 to t, where $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$, and using the change of variables $y = a + \frac{x}{\mu}$, we obtain that

$$\ln\big(\frac{\mu(t)}{\mu_0}\big) \leq c(\varepsilon \|b'\|_{L^1} \|\eta\|^2_{L^\infty} + \varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}})t \leq \frac{c\delta}{6\ln c_0} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Since around zero we have the Taylor expansion $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, it follows that

$$\frac{\mu(t)-\mu_0}{\mu_0} \leq \frac{c\delta}{6\ln c_0} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Hence, we obtain

$$|\mu(t)-\mu_0| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}),$$

where $\tilde{c}_0$ is a constant depending on α_0, μ_0. Thus,

$$\frac{2\mu_0}{3} \leq \mu(t) \leq \frac{4\mu_0}{3} \qquad \text{for} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon}). \tag{6.6.4}$$

Equations (6.6.3) and (6.6.4) show that the conditions in the definition of T (6.6.2) hold with better bounds, i.e. $3\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}$ instead of $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\frac{4\mu_0}{3}$ instead of $\frac{3\mu_0}{2}$, and $\frac{2\mu_0}{3}$ instead of $\frac{\mu_0}{2}$, for $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Since $w(t)$ and $\mu(t)$ are continuous with respect to time, it follows that there exists $t_0 > 0$ such that the conditions in the definition of T with exactly the same bounds as in that definition hold for times $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon}) + t_0$. This contradicts our assumption $T < \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Therefore, the conclusion of the proposition follows. □

6.7 Proof of Theorem 6.1.1

In this section we prove that Theorem 6.1.1 follows from Proposition 6.6.3.

Proof of Theorem 6.1.1. First we notice that $u(0) = g(0) \cdot \eta$, where $g(0) = (a_0, \alpha_0, \phi_0, \mu_0)$. Thus, by Proposition 6.6.3, it follows that $u(t)$ can be reparametrized as $u(t) = g(t) \cdot (\eta + w(t))$ for times $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6\ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$, and moreover

$$\|w(t)\|_{L^\infty([0,t],H_+^{\frac{1}{2}})} \leq 3\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}, \quad \frac{\mu_0}{2} \leq \mu(t) \leq \frac{3\mu_0}{2}.$$

By Lemma 6.4.12 we then obtain

$$\|X\| \leq c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}. \tag{6.7.1}$$

Proceeding as in the last part of the proof of Proposition 6.6.3, we obtain that

$$|\mu(t) - \mu_0| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

for $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Similarly we have $|\bar{\mu}(t) - \mu_0| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Then

$$|\mu(t) - \overline{\mu}(t)| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

By equation (6.7.1) and using the definition of X, it follows that

$$\Big|\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - C\Big| \leq c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}.$$

Thus

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int b'(a + \frac{x}{\mu})|\eta(x)|^2 \frac{dx}{\mu} + c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}.$$

Proceeding as we did for $\mu(t)$ and possibly making the constant $\tilde{c}_0$ larger, we obtain that

$$|\alpha(t) - \alpha_0| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}),$$
$$|\alpha(t) - \overline{\alpha}(t)| \leq \tilde{c}_0 \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}),$$

for $0 \leq t \leq \frac{\delta}{6 \ln c_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}} \ln(\frac{1}{\varepsilon})$.

We thus proved that for the above range of time, $\mu(t)$ and $\alpha(t)$ stay close to μ_0 and α_0 respectively. The definition of X (6.4.2) and the estimate (6.7.1) then yield that a, α, ϕ, μ satisfy the perturbed effective dynamics (6.1.8) in the statement of Theorem 6.1.1.

By Lemma 6.4.6 we have that $\|w\|_{L^2}^2 = \pi\Big(\frac{\alpha_0^2\mu_0}{\alpha^2\mu} - 1\Big)$. Then, the equations satisfied by $\bar{\alpha}$ and $\bar{\mu}$ yield $\partial_t(\bar{\alpha}^2\bar{\mu}) = 0$, and thus we obtain that

$$\alpha^2\mu = \alpha_0^2\mu_0 + c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}}, \quad \bar{\alpha}^2\bar{\mu} = \alpha_0^2\mu_0.$$

Subtracting the equations satisfied by ϕ and $\bar{\phi}$, we then obtain that

$$\begin{aligned}
|\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}| = \Big| &- \frac{\alpha_0^2\mu_0}{4}(\mu - \bar{\mu}) - \frac{\varepsilon}{\pi} \int \Big(b(a + \frac{x}{\mu}) - b(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})\Big)|\eta|^2 dx \\
&- \frac{\varepsilon}{\pi} \int \Big(b'(a + \frac{x}{\mu}) - b'(\bar{a} + \frac{x}{\bar{\mu}})\Big)x|\eta(x)|^2 \frac{dx}{\mu}\Big| + c\varepsilon^{1+\frac{2\delta}{3}} \\
&\leq c|\mu - \bar{\mu}| + c\varepsilon \leq (\tilde{c}_0\delta + c)\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \ln(\frac{1}{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Integrating, we obtain the desired estimate for $|\phi-\bar{\phi}|$. Similarly we obtain the estimate for $|a-\bar{a}|$.

Let $0<\rho\ll 1$. Suppose ε is small enough such that $\varepsilon^{\rho}\ln(\frac{1}{\varepsilon})^2\leq 1$. Then we have that

$$|\phi-\bar{\phi}|\leq \tilde{c}_0\delta\varepsilon^{2\delta}\ln(\frac{1}{\varepsilon})^2\leq c\varepsilon^{2\delta-\rho}.$$

If $2\delta-\rho\geq\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}$, which is equivalent to $\delta\geq\frac{3}{10}+\frac{3}{5}\rho>\frac{3}{10}$, then one can easily see that $|\phi-\bar{\phi}|\leq\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}$. This together with the approximations for a,α,μ in equations (6.1.10) yields

$$\|\alpha(t)e^{i\phi(t)}\mu(t)\eta(\mu(t)(x-a(t)))-\bar{\alpha}(t)e^{i\bar{\phi}(t)}\bar{\mu}(t)\eta(\bar{\mu}(t)(x-\bar{a}(t)))\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}\leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}}.$$

Thus, if $\delta\geq\frac{3}{10}+\frac{3}{5}\rho>\frac{3}{10}$, we have that

$$\|u(t)-\bar{\alpha}(t)e^{i\bar{\phi}(t)}\bar{\mu}(t)\eta(\bar{\mu}(t)(x-\bar{a}(t)))\|_{H_+^{\frac{1}{2}}}\leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{3}},$$

for times $0\leq t\leq\frac{\delta}{6\ln c_0}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}\ln(\frac{1}{\varepsilon})$.

$\square$

Bibliographie

[1]E.V. Abakumov, *The inverse spectral problem for Hankel operators of finite rank,* (Russian. English, Russian summary) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 217 (1994), Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funktsii. 22, 5–15, 218 ; translation in J. Math. Sci. (New York) 85 (1997), no. 2, 1759–1766.

[2]M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform–Fourier analysis for nonlinear problems,* Studies in Appl. Math. 53, no. 4 (1974), 249–315.

[3]W.K. Abou Salem, *On the renormalization group approach to perturbation theory for PDEs,* Ann. Henri Poincaré 11, no. 6, (2010) 1007–1021.

[4]V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, (1989).

[5]V.I. Arnold, A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics,* Benjamin, (1968), in particular Appendix 26.

[6]H. Bahouri and P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations,* Amer. J. Math., 121 (1999), 131–175.

[7]H. Bahouri, P. Gérard, C.-J. Xu, *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg,* (French. English summary) [Besov spaces and generalized Strichartz estimates on the Heisenberg group] J. Anal. Math. 82 (2000), 93–118.

[8]N.N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropol'skii *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations,* Hindustan, Delhi (1958).

[9]J. Bourgain, *On the Cauchy problem for periodic KdV-type equations,* Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993), J. Fourier Anal. Appl. Special Issue (1995), 17–86.

[10]J. Bourgain, *Aspects of long time behaviour of solutions of nonlinear Hamiltonian evolution equations,* Geom. Funct. Anal. 5(2) (1995), 105–140.

[11]J. Bourgain, *On the growth in time of higher Sobolev norms of smooth solutions of Hamiltonian PDE,* Internat. Math. Res. Notices, no. 6 (1996), 277–304.

[12]J. Bourgain, *Remarks on stability and diffusion in high-dimensional Hamiltonian systems and partial differential equations,* Ergodic Theory Dynam. Systems 24, no. 5 (2004), 1331–1357.

[13]J. Bourgain, *Nonlinear Schrödinger Equations,* Hyperbolic equations and frequency interactions (Park City, UT, 1995), 3–157, IAS/Park City Math. Ser., 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999).

[14]J. C. Bronski, R. L. Jerrard, *Soliton dynamics in a potential,* Mathematical Research Letters 7 (2000), 329–42.

[15]N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on* $\mathbb{S}^d$*,* MRL, 9 (2002), 323-335.

[16]N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds,* Amer. J. Math., 126 (2004), 569–605.

[17]N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces,* Invent. Math., 159 (2005), 187–223.

[18]T. Cazenave, P.-L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations,* Comm. Math. Phys., 85, no. 4 (1982), 549–561.

[19]L.-Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, *Renormalization group theory for global asymptotic analysis,* Phys. Rev. Lett. 73(10) (1994), 1311–1315.

[20]L.-Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, *Renormalization group and singular perturbations : multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory,* Phys. Rev. E 543(1) (1996), 376–394.

[21]J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^3$*,* Ann. of Math. (2) 167, no. 3 (2008), 767–865.

[22]J. Colliander, M.Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation,* Invent. Math. 181, no. 1 (2010), 39–113.

[23]P. Deift, E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line,* Comm. Pure Appl. Math. 32, no. 2 (1979), 121–251.

[24]R. De Ville, A. Harkin, M. Holzer, K. Josic, T. Kaper, *Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations,* Physica D 237 (2008), 1029–1052.

[25]J.J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates.* Comm. Pure Appl. Math. 33, no. 6 (1980), 687–706.

[26]W. Eckhaus, P. Schuur, *The emergence of solitons of the Korteweg de Vries equation from arbitrary initial conditions,* Math. Meth. Appl. Sci., 5 (1983), 97–116.

[27]E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, *The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds,* J. Phys. A 36, no. 7 (2003), 101–107.

[28]E. Fiorani, G. Sardanashvily, *Global action-angle coordinates for completely integrable systems with noncompact invariant submanifolds,* J. Math. Phys. 48, no. 3,(2007), 032901, 9 pp.

[29]J. Fröhlich, S. Gustafson, B. L. G. Jonsson, I. M. Sigal, *Solitary wave dynamics in an external potential,* Comm. Math. Phys. 250 (2004), 613–42.

[30]J. Fröhlich, S. Gustafson, B. L. G. Jonsson, I. M. Sigal, *Long time motion of NLS solitary waves in a confining potential,* Annales Henri Poincaré 7 (2006), 621–660.

[31]J. Fröhlich, T.-P. Tsai, H.-T. Yau, *On the point-particle (Newtonian) limit of the nonlinear Hartree equation,* Comm. Math. Phys. 225 (2002), 223–74.

[32]C.S. Gardner, C.S. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation,* Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1095–1097.

[33]P. Gérard, *Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev,* (French) ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variation, vol.3 (1998), 213–233.

[34]P. Gérard, S. Grellier, *L'équation de Szegö cubique,* Séminaire X EDP, 20 octobre 2008, École Polytechnique, Palaiseau, `http://sedp.cedram.org/cedram-bin/article/SEDP_2008-2009____A2_0.pdf`.

[35]P. Gérard, S. Grellier, *The cubic Szegö equation,* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Paris, 4^{e} série, t. 43 (2010), 761–810.

[36]P. Gérard, S. Grellier, *Invariant tori for the cubic Szegö equation,* to appear in Inventiones Mathematicae.

[37]P. Gérard, S. Grellier, *Effective integrable dynamics for some nonlinear wave equation* (2011) in preparation.

[38]P. Germain, *Space-time resonances*, arXiv :1102.1695.

[39]P. Germain, N. Masmoudi, J. Shatah, *Global solutions for 2D quadratic Schrödinger equations,* arXiv :1001.5158.

[40]P. Germain, *Global existence for coupled Klein-Gordon equations with different speeds,* arXiv :1005.5238.

[41]P. Germain, N. Masmoudi, J. Shatah, *Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347, no. 15–16 (2009), 897–902.

[42]P. Germain, N. Masmoudi, J. Shatah, *Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations,* Int. Math. Res. Not., no. 3 (2009), 414–432.

[43]B. Grébert, L. Thomann, *Resonant dynamics for the quintic nonlinear Schrödinger equation,* (2011) preprint.

[44]S. Gustafson, K. Nakanishi, T.-P. Tsai, *Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions,* Commun. Contemp. Math. 11, no. 4 (2009), 657–707.

[45]Z. Hani, *Global and dynamical aspects of nonlinear Schrödinger equations on compact manifolds*, Ph.D. thesis UCLA (2011).

[46]R. Hirota, *Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons,* Phys. Rev. Lett., 27 (1971), 1192–1194.

[47]T. Hmidi, S. Keraani, *Remarks on the blow-up for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equations,* SIAM J. Math. Anal., 38, no.4 (2006), 1035–1047.

[48]J. Holmer, M. Zworski, *Slow soliton interaction with delta impurities,* J. Mod. Dyn. 1, no. 4 (2007), 689–718.

[49]J. Holmer, M. Zworski, *Soliton interaction with slowly varying potentials,* Int. Math. Res. Not., (2008), no. 10, Art. ID rnn026, 36 pp.

[50]J. Holmer, G. Perelman, M. Zworski, *Effective dynamics of double solitons for perturbed mKdV,* preprint arXiv :0912.5122v2.

[51]L. Hörmander, *The Analysis of Linear and Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis,* second edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag (2003).

[52]T. Kappeler, J. Pöschel, *KdV & KAM,* A Series of Modern Surveys in Mathematics, 45, Springer-Verlag, Berlin, (2003).

[53]S. Keraani, *On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equations,* J. Differential Equations, 175 (2001), 353–392.

[54]S. Keraani, *Semiclassical limit of a class of Schrödinger equations with potential,* Comm. Partial Differential Equations 27, no. 3-4 (2002), 693–704.

[55]S. Keraani, *Semiclassical limit for nonlinear Schrödinger equation with potential. II,* Asymptot. Anal. 47, no. 3–4 (2006), 171–186.

[56]S. B. Kuksin, *Oscillations in space-periodic nonlinear Schrödinger equations.* Geom. Funct. Anal. 7, no. 2, (1997) 338–363.

[57]P. Lax, *Translation invariant spaces*, Acta Math., 101 (1959), 163–178.

[58]P. Lax, *Integral of nonlinear equations of evolution and solitary waves,* Comm. Pure and Applied Math., 101 (1968), 467–490.

[59]P. Lax, *Linear algebra,* Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, (1997).

[60]P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1, no. 2 (1984), 109–145.

[61]P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1, no. 4 (1984), 223–283.

[62]S.V. Manakov, S.P. Novikov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov, *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method,* Translated from the Russian. Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau [Plenum], New York, (1984).

[63]L. Markus, K.R. Meyer, *Generic Hamiltonian Systems are Neither Integrable nor Ergodic,* Memoirs of the A.M.S. 144, (1974).

[64]Y. Martel, F. Merle, *Description of two soliton collision for the quartic gKdV equations,* arXiv :0709.2672v1 [math.AP].

[65]A.V. Megretskii, V.V. Peller, S.R. Treil, *The inverse spectral problem for self-adjoint Hankel operators,* Acta Math. 174, no. 2 (1995), 241–309.

[66]F. Merle, L. Vega, *Compactness at blowup time for L2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equations in 2D,* Int. Math. Res. Not., 8 (1998), 399–425.

[67]I. Moise, R. Temam, *Renormalization group method. Applications to Navier-Stokes equation,* Discret. Continuous Dyn. Syst. 6 (2000), 191–200.

[68]I. Moise, M. Ziane, *Renormalization Group Method. Applications to Partial Differential Equations,* J. Dyn. Differ. Equ. 13 (2001), 275–321.

[69]N.K. Nikolskii, *Operators, Functions and Systems : An Easy Reading, Vol.I : Hardy, Hankel, and Toeplitz,* Mathematical Surveys and Monographs, vol.92, AMS, (2002).

[70]S.P. Novikov, *Theory of Solitons : The Inverse Scattering Method,* Moscow : Nauka (1980).

[71]T. Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations,* Nonlinear Anal. 14 (1990), 765–769.

[72]V.V. Peller, *Hankel Operators and Their Applications,* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2003).

[73]G. Perelman, *A remark on soliton-potential interactions for nonlinear Schrödinger equations,* Math. Res. Lett. 16, no. 3 (2009), 477–486.

[74]M. Petcu, R. Temam, D. Wirosoetisno, *Renormalization group method applied to the primitive equations,* J. Differ. Equ. 208 (2005), 215–257.

[75]O. Pocovnicu, *Traveling waves for the cubic Szegö equation on the real line,* arXiv :1001.4037v2 [math.AP], to appear in Analysis and PDEs.

[76] O. Pocovnicu, *Explicit formula for the solution of the Szegö equation on the real line and applications,* arXiv :1012.2943v1 [math.AP], accepted at DCDS-A.

[77] O. Pocovnicu, *Soliton interaction with small Toeplitz potentials for the cubic Szegö equation on the real line,* preprint.

[78] O. Pocovnicu, *First and second approximations for a non-linear wave equation,* preprint.

[79] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* (French) Dover Publications, Inc., New York, N.Y., (1957).

[80] J. Pöschel, *A lecture on the classical KAM theorem,* Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), 707–732, Proc. Sympos. Pure Math., 69, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001).

[81] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.I-IV,* Academic Press, 1972–1978.

[82] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, Second edition, 1980.

[83] E. Ryckman, M. Visan, *Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in* R^{1+4}, Amer. J. Math. 129, no. 1 (2007), 1–60.

[84] J. Shatah, *Space-time resonances,* Quart. Appl. Math. 68, no. 1, (2010) 161–167.

[85] T. Tao, *Why are solitons stable ?,* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 46, no. 1 (2009), 1–33.

[86] R. Temam, D. Wirosoetisno, *Averaging of differential equations generating oscillations and an application to control,* Special issue dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions. Appl. Math. Optim. 46, no. 2-3 (2002), 313–330.

[87] M. Visan, *Global well-posedness and scattering for the defocusing cubic NLS in four dimensions,* arXiv :1011.1526v1.

[88] M.V. Vladimirov, *On the solvability of a mixed problem for a nonlinear equation of Schrödinger type,* Sov. math. Dokl. 29 (1984), 281–284.

[89] C.E. Wayne, *An introduction to KAM theory.* Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations (Berkeley, CA, 1994), 3–29, Lectures in Appl. Math., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996).

[90] M. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates,* Com. Math. Phys., 87 (1982/1983), 567–576.

[91] V.I. Yudovich, *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid,* (Russian) Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. 3 (1963), 1032–1066.

[92] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media,* Sov. Phys. JETP 34 (1972), 62–69.

[93]M. Ziane, *On a certain renormalization group method,* J.Maths.Phys., 41 (5) (2000).