

MASTERARBEIT

Struktur und Wachstum von Graph Produkten

verfasst von
Karin COMINO

unter der Leitung von
Dr. Laura CIOBANU

Zusammenfassung

In dieser Masterarbeit werden zwei Schwerpunkte behandelt. Im ersten Punkt geht es um die Struktur von Graph Produkten. Hierbei steht die Frage im Mittelpunkt, ob das Graph Produkt die Struktur seiner Knoten-Gruppen erbt. Der zweite Schwerpunkt liegt bei der geodätischen und sphärischen Wachstumsreihe von Gruppen. Darin wiederum errechnen wir das sphärische und geodätische Wachstum von Spezialfällen von Graph Produkten und dann untersuchen wir Familien von Gruppen auf polynomielles und exponentielles geodätisches Wachstum.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Definitionen	3
2.1	Gruppenpräsentation	3
2.1.1	Wörter	3
2.1.2	Gruppen	3
2.2	Cayley Graphen	5
2.3	Geodäten	6
2.4	Graph Produkte und Right Angled Artin Groups	7
2.5	Reguläre Sprachen und Automaten	8
2.6	Wachstumsreihe von Gruppen	9
2.7	Amalgamiertes Produkt von Gruppen	11
3	Eigenschaften von Graph Produkten	13
3.1	Cannon Pair	13
3.2	Hyperbolische Gruppen	18
3.3	Semihyperbolische Gruppe	18
3.4	Automatische Gruppen	24
3.5	Termersetzungssystem	29
4	Sphärisches und geodätisches Wachstum	38
4.1	Überlagerungen von Graphen	38
4.2	Formel für sphärisches Wachstum	42
4.3	Formel für geodätisches Wachstum	45
4.4	Index von Untergruppen	46
4.5	Spezielle Gruppen und deren geodätisches Wachstum	48
4.5.1	Virtuell zyklische Gruppen	49
4.5.2	Gruppen mit frei abelschen aber nicht zyklischen Untergruppe	50
4.5.3	Nilpotente Gruppen	50

Abbildungsverzeichnis

2.1	Graph mit zwei Knoten und einer Kante	5
2.2	Graph mit zwei Knoten und einer gerichteten Kante	5
2.3	Graph mit zwei Knoten und einer gerichteten und beschrifteten Kante	6
2.4	Cayley Graph von $\Gamma_{\mathbb{Z},\{a\}}$	6
2.5	Cayley Graph von $\Gamma_{\mathbb{Z},\{x,y\}}$	6
2.6	q_0 ist der <i>Start-State</i> , q_1 ist ein <i>State</i> und q_2 ist ein <i>Final-State</i>	9
2.7	Kante von q_i nach q_j mit Label a	9
2.8	Dieser Automat akzeptiert L	9
3.1	Dieser Automat akzeptiert die Geodäten von \mathbb{Z}	13
3.2	Dieser Automat akzeptiert $A_i^* \subset A^*$	14
3.3	Dieser Automat akzeptiert die Geodäten von \mathbb{Z}^2	16
3.4	Dieser Automat akzeptiert die Geodäten von $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}$	17
3.5	$\mathfrak{G} = \{G_A, G_B, G_C\}$	22
3.6	Konstruktion des Bicomblings	23
3.7	Dieser Automat akzeptiert die Sprache $\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$	27
3.8	Dieser Automat akzeptiert die Normalform von $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}$	29
3.9	Untergraph von Γ	32
3.10	Dieser Automat akzeptiert die irreduziblen Wörter von \mathbb{Z}_2	36
3.11	Dieser Automat akzeptiert die irreduziblen Wörter von $\mathbb{Z}_2^2 * \mathbb{Z}_2$	37
4.1	Der Stern von v_5 ist $\{v_3, v_4, v_5\}$	38
4.2	Zwei Überlagerungen von Γ	39

Kapitel 1

Einleitung

Gegeben sei ein Graph und eine Menge von Gruppen. Jedem Knoten im Graph wird eine Gruppe aus dieser Menge zugeordnet, diese heissen Knoten-Gruppen. Das Graph Produkt wird von den Knoten-Gruppen erzeugt, wobei die Elemente von zwei benachbarten Knoten-Gruppen kommutieren. Hat der Graph keine Kanten, ist das Graph Produkt dasselbe wie das freie Produkt. Ist der Graph komplett, ist das Graph Produkt das direkte Produkt. Also ist das Graph Produkt eine Verallgemeinerung von direkten und freien Produkten.

Nachdem die wichtigsten Notationen, Definitionen und Konzepte für die Graph Produkte und das Wachstum von Gruppen eingeführt wurden, behandeln wir zwei Themen: die Struktur und das Wachstum von Graph Produkten. Falls alle Knoten-Gruppen isomorph zu \mathbb{Z} sind, heisst das Graph Produkt Right Angled Artin Group (RAAG).

Im ersten Teil (Kapitel 3) beschäftigen wir uns mit der Struktur von Graph Produkten. Wir fragen uns: wenn alle Knoten-Gruppen eine bestimmte Eigenschaft haben, gilt diese Eigenschaft auch für das Graph Produkt? Wir werden sehen, dass dies für Cannon Pairs, semihyperbolische und automatische Gruppen, sowie für Gruppen mit konvergenten Termersetzungs-systemen gilt.

Im zweiten Teil (Kapitel 4) beschäftigen wir uns mit dem Wachstum von Gruppen. Das Wachstum einer Gruppe hängt von der Präsentation der Gruppe ab. Ein Element der Gruppe wird also durch ein Wort, bestehend aus den Erzeugern und ihren (formalen) Inversen, dargestellt. Ein Wort ist eine Geodäte, wenn es kein kürzeres Wort gibt, das dasselbe Element der Gruppe darstellt. Damit können wir nun zwei Potenzreihen, die sphärische und die geodätische Wachstumsreihe, definieren. Bei der sphärischen Wachstumsreihe sind die Koeffizienten definiert als die Anzahl Elemente, die durch eine Geodäte der Länge n beschrieben werden. Das geodätische Wachstum, oder die geodätische Wachstumsreihe hat Koeffizienten, die durch die Anzahl Geodäten definiert sind. Am Anfang dieses Kapitels sehen wir eine Formel für das sphärische Wachstum von einem amalgamierten Produkt sowie Formeln für das geodätische Wachstum vom freien und direkten Produkt von Gruppen. In den darauffolgenden Seiten werden wir sehen, wie schnell das geodätische

Wachstum von Familien von Gruppen ist. Das heisst, ob die Koeffizienten der Potenzreihe polynomiell oder exponentiell sind. Wir werden beispielsweise sehen, dass eine Gruppe, die sich surjektiv auf \mathbb{Z}^2 abbilden lässt unabhängig von ihrem Erzeugendensystem exponentielles Geodätisches Wachstum hat. Das heisst, eine RAAG mit mehr als zwei Erzeuger hat exponentielles geodätisches Wachstum.

Die Notation vom sphärische Wachstum wurde schon 1955 von A.S. Scharze und 1968 unabhängig davon von J. Milnor eingeführt und seither wurde auf diesem Gebiet sehr viel geforscht. Dementsprechend wird das sphärische Wachstum heute sehr gut verstanden. So hat R. I. Grigorchuk 1984 herausgefunden, dass es Gruppen mit intermediate, also weder polynomiellen noch geodätischen Wachstum gibt. Im Gegensatz dazu ist das geodätische Wachstum ein eher neues Interessengebiet. Erst im Jahr 2010 wurde von M. Bridson, J. Burillo, M. Elder und Z. Sunić einen Artikel geschrieben, bei dem es um das polynomielle geodätische Wachstum von Gruppen geht, das wir im letzten Abschnitt von dieser Arbeit behandeln.

Diese Arbeit wurde von der Hoffnung geleitet, herauszufinden, wann und ob zwei verschiedene RAAGs dasselbe geodätische Wachstum haben. Dieses Ziel konnte nicht erreicht werden. Doch durch die Arbeit von Rotislav Grigorchuk und Tatiana Nagnibeda über die komplette Wachstumsfunktion von hyperbolischen Gruppen besteht die Vermutung, dass zwei symmetrische Graphen mit gleich vielen Knoten und ohne komplette Untergraphen mit mehr als zwei Knoten dasselbe geodätische Wachstum haben. Den Beweis von diesem Artikel an das geodätische Wachstum anzupassen sprengt aber leider den Rahmen dieser Arbeit.

Kapitel 2

Definitionen

In diesem Kapitel werden zuerst die wichtigsten Definitionen und Notationen sowie Voraussetzungen für diese Arbeit beschrieben. Diese Begriffe werden durch Beispiele illustriert.

2.1 Gruppenpräsentation

2.1.1 Wörter

Ein Alphabet A ist eine abzählbare Menge, deren Elemente wir als Buchstaben bezeichnen. Ein Wort ist eine Folge von Buchstaben. Die Menge aller Wörter bezeichnen wir als A^* , also der kleinste freie Monoid, der A enthält. Das leere Wort wird mit ε bezeichnet.

Die Länge eines Wortes w wird mit $\ell(w)$ bezeichnet und ist die Anzahl der Buchstaben in w .

Eine *Sprache* L über dem Alphabet A ist eine Teilmenge von A^* .

A^{-1} ist die Menge der formalen Inversen von A . Das heisst mit $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ist $A^{-1} = \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1}, \dots\}$.

Beispiel 2.1

Für $A = \{a\}$, ist $A^* = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Menge $L = \{\varepsilon, a, a^2, a^3\}$ ist eine Sprache.

2.1.2 Gruppen

Definition 2.2

Ein Wort $w \in (A \cup A^{-1})^*$ heisst *reduziert*, falls es kein Unterwort der Form aa^{-1} oder $a^{-1}a$ gibt.

Zwei Wörter u und v kann man konkatenieren, das heisst hintereinander stellen. Dies

ergibt ein neues Wort $w := uv$.

Definition 2.3

Sei \mathbb{F} eine Gruppe und $A \subset \mathbb{F}$ eine nichtleere Teilmenge. \mathbb{F} heisst *freie Gruppe* über A , falls es für jede Gruppe G und jede Abbildung $f : A \rightarrow G$ einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow G$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow i & \nearrow \exists! \varphi & \\ \mathbb{F} & & \end{array}$$

Für unsere Zwecke reicht es, sich die freie Gruppe über A als die Menge der reduzierten Wörter mit dem Alphabet $A \cup A^{-1}$ vorzustellen. Wobei die Gruppenoperation die Konkatenation ist und wenn $u = u_1 y$ und $v = y^{-1} v_1$ ist $w = uv = u_1 v_1$, damit das neue Wort w noch reduziert ist.

Definition 2.4

Sei G eine Gruppe und $N < G$ eine Untergruppe. Dann heisst N *Normalteiler* von G , falls $ghg^{-1} \in N$ für alle Elemente $g \in G$ und $h \in N$.

Sei K eine Untergruppe von G . Dann ist der *Normalisator* von K die Untergruppe

$$N(K) := \langle \{gkg^{-1} \mid g \in G, k \in K\} \rangle.$$

Man kann zeigen, dass $N(K)$ ein Normalteiler von G ist und falls K normal in G ist, ist $K = N(K)$.

Man kann den Normalisator auch für eine beliebige Teilmenge $R \subset G$ definieren. Die Menge $\langle R \rangle_G$ sei die kleinste Untergruppe von G , die R enthält. Der Normalisator von R ist dann $N(\langle R \rangle_G)$. Abgekürzt schreibt man $N(R) = N(\langle R \rangle_G)$.

Definition 2.5

Sei A eine Menge von Elementen und $R \subset \mathbb{F}(A)$. Dann ist $G = \langle A \mid R \rangle$ die *Gruppenpräsentation* der Faktorgruppe $G := \mathbb{F}(A)/N(R)$.

In dieser Arbeit sind die Gruppen immer endlich erzeugt, das heisst $|A| < \infty$.

Die Präsentation einer Gruppe ist nicht eindeutig. Zum Beispiel ist die Gruppe $\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle = \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle$. Die freie Gruppe über A kann man darstellen als $\mathbb{F}(A) = \langle A \mid \rangle$, also als eine Präsentation, die frei von Relationen ist. Dies ist aber keine Definition von freien Gruppen, da man eine freie Gruppe auch mit Relationen darstellen kann

$$\mathbb{F}(A) = \langle A \cup \{b\} \mid b = 1 \rangle.$$

2.2 Cayley Graphen

Eine Gruppe kann auch mit Hilfe eines Cayley Graphen dargestellt werden. Bevor wir die Konstruktion von diesem speziellen Graphen sehen, führen wir den Begriff der Graphen im Allgemeinen ein. Später in dieser Arbeit sind auch diese wichtig, nicht nur die Cayley Graphen.

Definition 2.6 (Siehe (12) Seite 6, Definition 1.9)

Ein *Graph* Γ besteht aus einem Tupel von Mengen $(V(\Gamma), E(\Gamma))$, $V(\Gamma)$ heissen die *Knoten* und $E(\Gamma)$ heissen die *Kanten* von Γ . Die Elemente von $E(\Gamma)$ sind von der Form $\{v, w\}$ für zwei verschiedene Elemente v, w von $V(\Gamma)$, wobei v und w die Endpunkte von der Kante $\{v, w\}$ genannt werden.

Man sagt auch, dass es eine Kante zwischen v und w gibt, falls $\{v, w\} \in E(\Gamma)$. In dieser Arbeit gibt es Kanten nur zwischen verschiedenen Knoten. Eine Kante zwischen v und v , ein sogenannter *Loop*, gibt es hier nicht. Mit dieser Definition schliesst man auch Doppelkanten, also zwei Kanten, die dieselben Knoten verbinden, aus.

Oft werden Graphen durch Zeichnungen illustriert, die den Graphen vollständig beschreiben.

Der Graph $\Gamma = (\{v, w\}, \{\{v, w\}\})$ wird folgendermassen dargestellt:

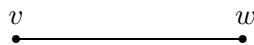


Abbildung 2.1: Graph mit zwei Knoten und einer Kante

Diese Art von Graphen nennt man *ungerichtet*, das heisst, die Kante $\{v, w\}$ ist dieselbe wie $\{w, v\}$. Es gibt aber auch Graphen, bei denen die Richtung der Kante eine Rolle spielt, die sogenannten *gerichteten Graphen*. Dabei werden die Kanten als Tupel (v, w) geschrieben, dies soll andeuten, dass die Kante von v nach w geht.

Der Graph $\Gamma = (\{v, w\}, \{(v, w)\})$ wird dann so dargestellt:

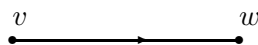


Abbildung 2.2: Graph mit zwei Knoten und einer gerichteten Kante

Es gibt sogar Graphen, bei denen die Kanten beschriftet sind. Die Kanten sind dann Tupel (v, w, a) , wobei v der Anfangspunkt, w der Endpunkt und a das sogenannte *Label* von der Kante ist.

Der Graph $\Gamma = (\{v, w\}, \{(v, w, a)\})$ wird dann so dargestellt:

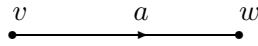


Abbildung 2.3: Graph mit zwei Knoten und einer gerichteten und beschrifteten Kante

Definition 2.7

Sei $G = \langle A \mid R \rangle$ eine Gruppenpräsentation. Der *Cayley Graph* ist der dazugehörige gerichtete und beschriftete Graph $\Gamma_{G,A}$, den man folgendermassen konstruiert. Für jedes Element in G gibt es einen Knoten, das heisst $V(\Gamma_{G,A}) = \{g \mid g \in G\}$ und es gibt eine Kante von g_1 nach g_2 mit dem Label x , falls $g_2 = g_1x$, also ist $E(\Gamma_{G,A}) = \{(g_1, g_2, x) \in G \times G \times A \mid \text{falls } g_2 = g_1x\}$.

Der Cayley Graph von einer Gruppe hängt sehr stark von seiner Präsentation ab. Der Graph $\Gamma_{\mathbb{Z},\{a\}}$, wobei $a = 1$ sieht so aus:

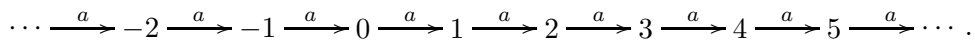


Abbildung 2.4: Cayley Graph von $\Gamma_{\mathbb{Z},\{a\}}$

Und der Graph $\Gamma_{\mathbb{Z},\{x,y\}}$, wobei $x = 2$ und $y = 3$ sieht so aus:

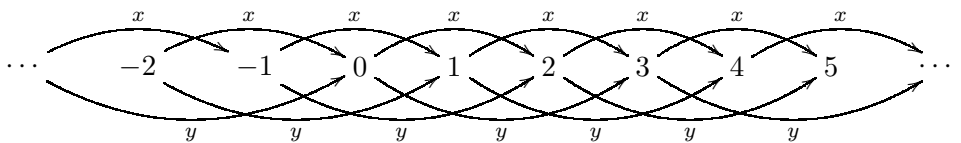


Abbildung 2.5: Cayley Graph von $\Gamma_{\mathbb{Z},\{x,y\}}$

2.3 Geodäten

Definition 2.8

Γ sei der Cayley Graph von G bezüglich A . Sei $w \in A^*$ ein reduziertes Wort. Dann heisst w *Geodäte*, wenn w in Γ einen Weg beschreibt, der geodätisch, also am kürzesten ist.

Ein Wort w , welches das Element $g \in G$ darstellt heisst Geodäte, falls es kein Wort w' gibt, das auch g darstellt und $\ell(w') < \ell(w)$. Die Länge von einem Element der Gruppe G ist die Länge der dazugehörigen Geodäte w . Da die Länge eines Gruppenelements also von der Präsentation abhängt, schreibt man $|g|_A = \ell(w)$, wobei A die Erzeugendenmenge von G ist.

2.4 Graph Produkte und Right Angled Artin Groups

Sei \mathfrak{G} eine Menge von endlich erzeugten Gruppen $\{G_1, \dots, G_n\}$ und Γ ein Graph mit n Knoten. Sei $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow V(\Gamma)$ eine Bijektion zwischen \mathfrak{G} und den Knoten von Γ , also $V(\Gamma)$.

Definition 2.9

Die Gruppe $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ wird von den Gruppen G_1, \dots, G_n erzeugt und die Elemente von G_i und $G_j, i \neq j$, kommutieren, falls es im Graphen Γ eine Kante zwischen den Knoten $\phi(G_i)$ und $\phi(G_j)$ gibt. $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ heisst *Graph Produkt*.

Die Elemente von $\mathfrak{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ heissen *Knoten-Gruppen* von $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$.

Beispiel 2.10

Sei $\mathfrak{G} = \{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2\}$, wobei \mathbb{F}_2 die freie Gruppe mit zwei Erzeugern ist, und Γ wie unten:

$$\mathbb{F}_2 = \langle a, b \mid \rangle \quad \mathbb{F}_2 = \langle c, d \mid \rangle$$

Dann ist $\Pi_\Gamma \mathfrak{G} = \langle a, b, c, d \mid ac = ca, ad = da, bc = cb, bc = db \rangle = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$, das direkte Produkt von zwei freien Gruppen mit je zwei Erzeugern, i. e. $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$.

Definition 2.11

Die *Right Angled Artin Group* (RAAG) ist ein Graph Produkt, bei dem die Menge \mathfrak{G} nur aus Gruppen isomorph zu \mathbb{Z} besteht. Alternativ kann man eine RAAG definieren als eine Gruppe G , die man folgendermassen präsentieren kann:

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i x_j = x_j x_i, (i, j) \in J \rangle$$

wobei $J \subset \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$. Falls \mathfrak{G} nur aus Gruppen isomorph zu \mathbb{Z} besteht, schreiben wir für $\Pi_\Gamma \mathfrak{G} = \Pi_\Gamma \mathbb{Z}$.

Beispiel 2.12

Sei Γ wie in der folgenden Abbildung:

$$\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle \quad \mathbb{Z} = \langle b \mid \rangle \quad \mathbb{Z} = \langle c \mid \rangle$$

Dann ist die Gruppenpräsentation von $\Pi_{\Gamma}\mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid ab = ba, bc = cb \rangle$.

Falls Γ ein kompletter Graph ist, das heisst, wenn es eine Kante zwischen allen Knoten $v \neq w$ gibt, ist $\Pi_{\Gamma}\mathbb{Z}$ eine freie abelsche Gruppe.

Falls Γ ein Graph ist ohne Kanten, dann ist $\Pi_{\Gamma}\mathbb{Z}$ eine freie Gruppe.

Dies sind die zwei Extremfälle von RAAGs.

2.5 Reguläre Sprachen und Automaten

Wie man am Anfang lesen konnte, ist eine Teilmenge von dem freien Monoid, erzeugt von A , eine Sprache. Es gibt verschiedene Arten von Sprachen. Noam Chomsky, ein berühmter Linguist, hat Sprachen, die gewisse Regelmässigkeiten aufweisen, in 4 verschiedene Klassen eingeteilt.

Die Klassen nennt man Typ- i -Grammatik, wobei $i = \{0, 1, 2, 3\}$ und die Typ- $(i + 1)$ -Grammatik \subset Typ- i -Grammatik. Die grösste Klasse, die Typ-0-Grammatik ist die unbeschränkte Grammatik, das heisst, alle Sprachen sind in dieser Klasse. Die kleinste dieser Klassen, die Typ-3-Grammatik ist die der regulären Sprachen. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns nur mit dieser Grammatik. Um die regulären Sprachen zu verstehen brauchen wir folgende Definition:

Ein endlicher Automat (DFA: **D**eterministic **F**inite **S**tate **A**utomaton) ist ein 5-Tupel (Q, A, δ, q_0, F) :

- Q ist eine endliche Menge q_0, \dots, q_n ; Q sind die *States*,
- A ist eine endliche Menge von Symbolen, also ein Alphabet,
- $\delta : A \times Q \rightarrow Q$ ist eine Funktion $(a, q_i) \mapsto q_j$; δ heisst *Transition Function*,
- $q_0 \in Q$ ist der *Start-State* und
- $F \subset Q$ ist ein Menge von *Final-States*.

Man sagt, dass ein Wort $w = x_1 \cdots x_n$ von einem Automaten akzeptiert wird, falls $\delta(x_n, \delta(x_{n_1}, \dots \delta(x_2, \delta(x_1, q_n)))) \in F$. Eine Sprache heisst *regulär*, falls sie von einem endlichen Automaten akzeptiert wird, das heisst genau die Wörter dieser Sprache werden von diesem Automaten akzeptiert.

Einen Automaten kann man auch graphisch darstellen. Die States werden durch folgende Kreise dargestellt.

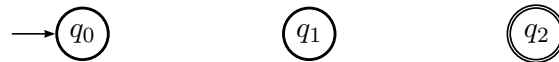


Abbildung 2.6: q_0 ist der *Start-State*, q_1 ist ein *State* und q_2 ist ein *Final-State*

Es gibt eine Kante von dem State q_i nach q_j mit dem Label a , falls die Transition Function (a, q_i) auf q_j abbildet ($\delta(a, q_i) = q_j$).

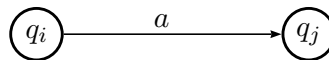


Abbildung 2.7: Kante von q_i nach q_j mit Label a

Beispiel 2.13

Sei $A = \{a, b\}$

- $L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ist eine reguläre Sprache, die der folgende Automat L akzeptiert.

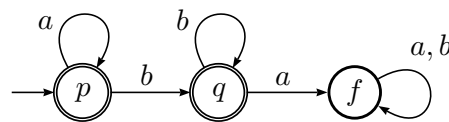


Abbildung 2.8: Dieser Automat akzeptiert L

- die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist keine reguläre Sprache. Dies kann man mit Hilfe vom *Pumping Lemma* (Siehe (12), Seite 136, Lemma 7.14) zeigen.

2.6 Wachstumsreihe von Gruppen

Definition 2.14 (Siehe (11), Seite 5)

Sei a_n definiert als die Anzahl Elemente $g \in G$, so dass $|g|_A = n$. Dann heisst die Reihe

$$S(G, z) := \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

sphärische Wachstumsreihe von G .

Die sphärische Wachstumsreihe wird manchmal auch verkürzt als Wachstumsreihe bezeichnet.

Definition 2.15 (Siehe (11), Seite 5)

Sei b_n definiert als die Anzahl Geodäten $w \in A^*$, so dass $\ell(w) = n$. Dann heisst die Reihe

$$\mathcal{G}(G, z) := \sum_{n \geq 0} b_n z^n$$

geodätische Wachstumsreihe von G .

Beispiel 2.16

Sei $G = \langle a \mid \rangle$, das heisst $G \cong \mathbb{Z}$. Dann ist $a_0 = 1$ und $a_n = 2$ für alle $n > 0$. Da jede Geodäte der Länge n die Form a^n oder a^{-n} hat. Also ist das geodätische Wachstum

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(G, z) &= 1 + \sum_{n \geq 1} 2z^n \\ &= 1 + 2z \sum_{n \geq 0} z^n. \end{aligned}$$

Diese Potenzreihe kann (formell) einer rationalen Funktion zugeordnet werden.

$$\mathcal{G}(G, z) = 1 + \frac{2z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Das geodätische Wachstum dieser Gruppe ist gleich wie das sphärische Wachstum, da es für jedes Element in G genau eine Präsentation gibt. Meistens ist dies jedoch nicht der Fall.

Beispiel 2.17

Sei $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, das heisst $G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Dann ist $a_0 = 1$ und $a_n = 4n$, denn die Elemente in G , die von mindestens n Erzeugern präsentiert werden, entsprechen dem Tupel $(m, k) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, so dass $|m| + |k| = n$. Das heisst $0 \leq |m| \leq n$ und $|k| = n - |m|$. Also hat man für die Wahl von $|m|$ n Möglichkeiten und m kann positiv oder negativ sein. $|k|$ wird durch die Wahl von m bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Also hat man $4n$ Möglichkeiten m und k zu wählen. Damit ist das sphärische Wachstum:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(G, z) &= 1 + \sum_{n \geq 1} 4nz^n \\ &= 1 + 4z \sum_{n \geq 0} (n+1)z^n \\ &= 1 + \frac{4z}{(1-z)^2} = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Ähnlich berechnet man die Koeffizienten der geodätischen Wachstumsreihe, $b_0 = 1$ und $b_n = 4 \cdot 2^n - 4$. Also ist das Wachstum hier:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(G, z) &= 1 + \sum_{n \geq 1} (4 \cdot 2^n - 4)z^n \\ &= 1 + 8z \sum_{n \geq 0} (2z)^n - 4z \sum_{n \geq 0} z^n \\ &= \frac{1+z+2z^2}{(1-2z)(1-z)}. \end{aligned}$$

2.7 Amalgamiertes Produkt von Gruppen

Um das amalgamierte Produkt von zwei Gruppen G_1 und G_2 über der Gruppe A zu definieren, braucht man zuerst eine Proposition:

Proposition 2.18

Seien G_1, G_2 und A Gruppen und $\alpha_i : A \rightarrow G_i$ ($i \in \{1, 2\}$) zwei Homomorphismen. Dann gibt es eine Gruppe $G_1 *_A G_2$ und Homomorphismen $f_i : G_i \rightarrow G_1 *_A G_2$ mit $f := f_i \circ \alpha_i$, die die folgenden Bedingungen erfüllen: Für jede Gruppe H und alle Homomorphismen $\varphi_i : G_i \rightarrow H$ mit $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$ gibt es genau einen Homomorphismus $\phi : G_1 *_A G_2 \rightarrow H$ mit $\phi \circ f_i = \varphi_i$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & \uparrow \phi & \nwarrow \varphi_2 & \\
 G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_1 *_A G_2 & \xleftarrow{f_2} & G_2 \\
 & \nwarrow \alpha_1 & \uparrow f & \nearrow \alpha_2 & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Beweis. Idee:

Sei $\delta_i : G_i \rightarrow G_1 * G_2$ die Inklusion. Sei $N := \langle (\delta_1 \circ \alpha_1(a)(\delta_2 \circ \alpha_2(a))^{-1} \text{ für alle } a \in A) \rangle$. Nun kann man zeigen, dass $(G_1 * G_2)/N$ die gewünschten Eigenschaften hat. \square

Definition 2.19

Die Gruppe $G_1 *_A G_2$, die die oben genannten Eigenschaften erfüllt heisst *amalgamiertes Produkt* von G_1 und G_2 über A .

Wenn die Präsentationen von $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ und $A = \langle S \mid R \rangle$, dann ist die Präsentation von dem amalgamierten Produkt

$$G_1 *_A G_2 = \langle S_1, S_2 \mid R_1, R_2, \varphi_1(s) = \varphi_2(s) \text{ für alle } s \in S \rangle.$$

Das amalgamierte Produkt von Gruppen hängt stark von den Abbildungen α_1 und α_2 ab.

Beispiel 2.20

Seien $G_1 \cong G_2 \cong A = \mathbb{Z}^2$, mit $G_i = \langle g_i, h_i \mid [g_i, h_i] \rangle$, $i = 1, 2$. Und $A = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$. Für α_i definiert als

$$\begin{aligned}
 \alpha_i & : a \mapsto g_i \\
 \alpha_i & : b \mapsto h_i,
 \end{aligned}$$

ist

$$G_1 *_A G_2 = \langle g_1, g_2, h_1, h_2 \mid [g_1, h_1], [g_2, h_2], g_1 = g_2, h_1 = h_2 \rangle = \mathbb{Z}^2.$$

Wenn man aber α_i definiert als

$$\begin{aligned}\alpha_i & : a \mapsto g_i \\ \alpha_i & : b \mapsto g_i,\end{aligned}$$

ist

$$G_1 *_A G_2 = \langle g_1, g_2, h_1, h_2 \mid [g_1, h_1], [g_2, h_2], g_1 = g_2, g_1 = g_2 \rangle = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

Ein weiteres Beispiel für ein amalgamiertes Produkt, das von der Wahl von α_1 und α_2 abhängt, gibt es im Kapitel 4, Beispiel 4.9.

Kapitel 3

Eigenschaften von Graph Produkten

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Familien von Gruppen. Wir nehmen an, dass in einen Graph Produkt alle Knoten-Gruppen einer bestimmten Familie von Gruppen angehören. Dann zeigen wir, dass das Graph Produkt auch zu dieser Familie gehört. Dies machen wir für Cannon Pairs, semihyperbolische und automatische Gruppen und Gruppen mit konvergenten Termersetzungssystemen.

3.1 Cannon Pair

Sei A ein endliches, symmetrisches Alphabet (das heisst $A = A^{-1}$). Sei G eine Gruppe mit Präsentation $G = \langle A \mid R \rangle$.

Definition 3.1 (Siehe (11), Seite 2)

(G, A) heisst *Cannon Pair*, falls die Sprache der Geodäten bezüglich A regulär ist.

Beispiel 3.2

Die Sprache der Geodäten von $\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle$ ist regulär, wobei $A = \{a, a^{-1}\}$, da der folgende Automat die Geodäten von \mathbb{Z} akzeptiert.

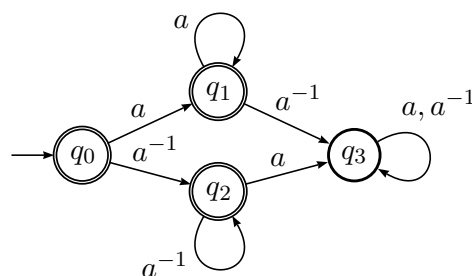


Abbildung 3.1: Dieser Automat akzeptiert die Geodäten von \mathbb{Z} .

Beispiel 3.3

In $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ ist das Wort $abab^{-1}$ keine Geodäte. Die Geodäten von $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sind Wörter, die entweder aus den Buchstaben a, b , oder a, b^{-1} oder a^{-1}, b oder a^{-1}, b^{-1} bestehen. Der Grund liegt darin, dass wenn ein Wort w die Buchstaben a und a^{-1} enthält, das heisst $w = w_1 a w_2 a^{-1} w_3$, wird das Element $\varphi(w)$ auch durch das kürzere Wort $w' = w_1 w_2 w_3$ präsentiert, weil jedes Element in A mit dem Buchstaben a kommutiert. Darum kommutiert auch w_2 mit a .

Theorem 3.4 (Siehe (11) Seite 2, Theorem 1)

Seien $\mathfrak{G} := G_1, \dots, G_n$ die Knoten-Gruppen von einem Graph Produkt $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ und A_i die symmetrische Menge der Erzeuger von G_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Mit $A := \bigcup_{i=1}^n A_i$ gilt:

$(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, A)$ ist ein Cannon Pair genau dann wenn (G_i, A_i) ein Cannon Pair ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. " \Rightarrow "

Sei $(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, A)$ ein Cannon Pair. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $A_i \subset A$ eine Teilmenge und damit ist auch der freie Monoid $A_i^* \subset A^*$ eine reguläre Sprache in A^* .

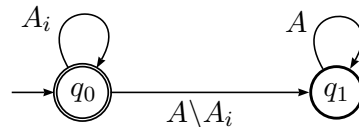


Abbildung 3.2: Dieser Automat akzeptiert $A_i^* \subset A^*$

Sei $w \in A_j^*$ eine Geodäte für $g \in G_j$. Dann ist $w \in A^*$ auch eine Geodäte für $g \in \Pi_\Gamma \mathfrak{G}$. Also ist die Sprache der Geodäten von G_j genau der Durchschnitt zwischen A_j^* und den Geodäten von $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$. Da der Durchschnitt von zwei regulären Sprachen regulär ist, ist auch die Sprache der Geodäten von A_j regulär. Also ist (G_j, A_j) ein Cannon Pair.

" \Leftarrow "

Jedes Paar (G_i, A_i) ist ein Cannon Pair. Dann gibt es für jedes (G_i, A_i) einen endlichen, vollständigen und deterministischen Automaten F_i , der die Sprache der Geodäten akzeptiert. Ausserdem kann man annehmen, dass jeder State in F_i ein Final-State ist, bis auf einen einzigen Fail-State.

Wenn man annimmt, es gibt ein nicht-Final-State, der aber nicht ein Fail-State ist, dann gibt es eine Geodäte w , die durch diesen State durchgeht. Also ist $w = w'w''$, wobei w' bei diesem State endet. Also ist w' keine Geodäte und kann durch ein kürzeres Wort u ersetzt werden. Somit kann man auch $w = w'w''$ durch das kürzere Wort uw'' ersetzen. Also ist $w'w''$ keine Geodäte $\not\llcorner$.

Damit die Automaten F_i alle Wörter von A^* verstehen, modifiziert man sie folgendermas-

sen:

- wenn es in Γ eine Kante zwischen den Knoten von G_i und G_j gibt also $[G_i, G_j] = \{1\}$, fügt man zu jedem State in F_i einen Loop mit dem Label a_j für alle $a_j \in A_j$ hinzu.
- wenn es keine Kante gibt, fügt man zu jedem State in F_i eine Kante zum Start-State mit dem Label a_j für alle $a_j \in A_j$ hinzu.

Aus diesen neu konstruierten Automaten F'_i macht man nun einen grossen Automaten F , der die Sprache der Geodäten von $(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, A)$ akzeptieren soll. Dies kann man folgendermassen tun: Jedes Tupel (s_1, \dots, s_n) wird zu einem Final-State, falls s_i ein Final-State von F'_i ist. Von dem Final-State (s_1, \dots, s_n) zu dem State (s'_1, \dots, s'_n) gibt es eine Kante mit dem Label $a \in A$, falls es in jedem F'_i eine Kante mit dem Label a von s_i nach s'_i gibt.

Es gilt: F akzeptiert $w \in A^*$ genau dann, wenn w eine Geodäte ist. Um das zu zeigen, beweist man die Kontraposition, F akzeptiert w nicht, genau dann, wenn w keine Geodäte ist.

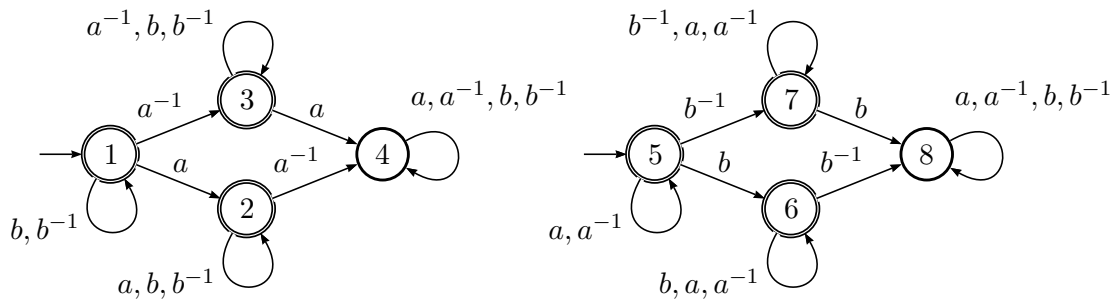
Sei also w ein Wort, das von F nicht akzeptiert wird. Also gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ so dass F'_j mit einem Buchstaben x von w in seinem Fail-State landet. Von x aus liest man alle Buchstaben nach links, bis man zu einem Buchstaben kommt, der mit x nicht kommutiert, oder man den Anfang des Wortes erreicht hat. Dieses Unterwort von w heisst w' . In w' löscht man alle Buchstaben, die nicht zum Alphabet A_j gehören. Damit erhält man ein Wort $w'' \in A_j^*$, das in F_j nicht akzeptiert wird. Also ist w'' keine Geodäte und kann durch ein kürzeres Wort ersetzt werden. Damit kann w selber auch durch ein kürzeres Wort ersetzt werden, das dasselbe Element in $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ darstellt. Dann ist w keine Geodäte.

Sei w keine Geodäte. Dann kann man die Unterwörter $w_i \in A_i^*$ so vertauschen, dass es dasselbe Element repräsentiert und ein Unterwort $w_j \in A_j^*$ enthält, das durch ein kürzeres Wort ersetzt werden kann. Also ist w_j keine Geodäte und damit wird es von F_j nicht akzeptiert. Das heisst auch, dass $F'_j w$ nicht akzeptiert. Da die Sprache, die F akzeptiert, eine Teilmenge der Sprache ist, die F_j akzeptiert, wird w von F nicht angenommen. \square

Um den Beweis besser zu illustrieren, werden wir die Konstruktion an zwei Beispielen durchführen.

Beispiel 3.5

Seien $G_1 = \langle a \mid \rangle$ und $G_2 = \langle b \mid \rangle$ und Γ ein kompletter Graph mit zwei Knoten. Das heisst $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z}$ und wir konstruieren den Automaten der die Geodäten von $\Pi_\Gamma \mathfrak{G} = G_1 \oplus G_2 \cong \mathbb{Z}^2$ akzeptiert. Die modifizierten Automaten F'_i (wie im Beweis) sehen wie folgt aus:



Dann ist der Automat F , den man in dem Beweis konstruiert hat, in diesem Beispiel:

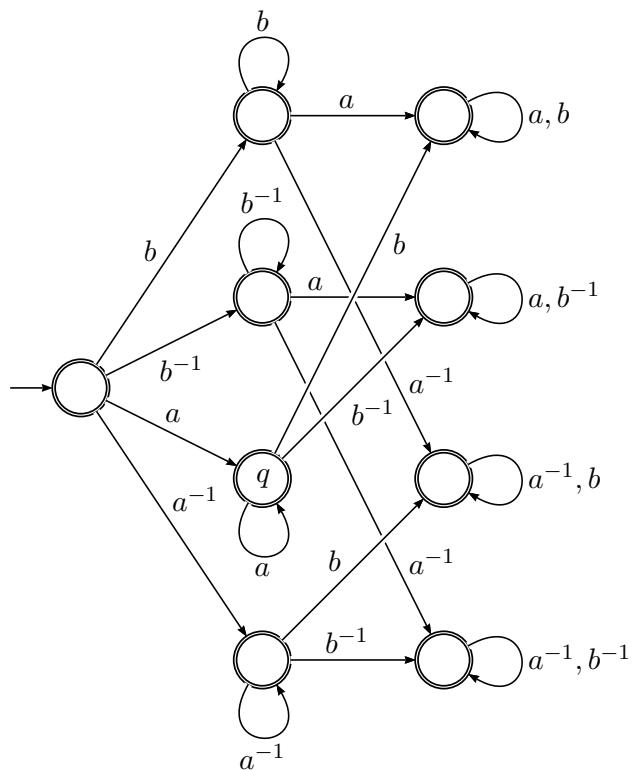


Abbildung 3.3: Dieser Automat akzeptiert die Geodäten von \mathbb{Z}^2

Hier wurde der Fail-State weggelassen, denn sonst sieht der Automat viel komplizierter aus. Der Automat ist dadurch nicht mehr deterministisch. Das heisst durch die graphische Darstellung des Automaten ist nicht bestimmt, was $\delta(a^{-1}, q)$ ist. Bei einem nicht-deterministischen Automaten werden alle Tupel (a, q) , die durch die Darstellung nicht bestimmt sind, durch δ auf einen gedachten Fail-State f abgebildet. Also wird ein Wort, das nicht fertiggelesen werden kann, vom Automaten nicht akzeptiert. Man kann zeigen, dass nicht-deterministische und deterministische Automaten äquivalent sind. Deswegen wird beim Rest dieser Arbeit keinen Unterschied zwischen deterministischen und nicht-deterministischen Automaten gemacht.

Beispiel 3.6

In diesem Beispiel konstruieren wir uns einen Automaten, der die Geodäten der Gruppe $\mathbb{F}^2 \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid ab = ba, bc = cb \rangle$ akzeptiert. Für $\mathfrak{G} = \{\langle a \mid \rangle, \langle b \mid \rangle, \langle c \mid \rangle\}$ und Γ wie in der Abbildung

$$\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle \quad \mathbb{Z} = \langle b \mid \rangle \quad \mathbb{Z} = \langle c \mid \rangle$$

ist diese Gruppe ein Graph Produkt. Also kann man auch diesen Automaten mit Hilfe der Konstruktion im Beweis von dem Theorem 3.4 beschreiben.

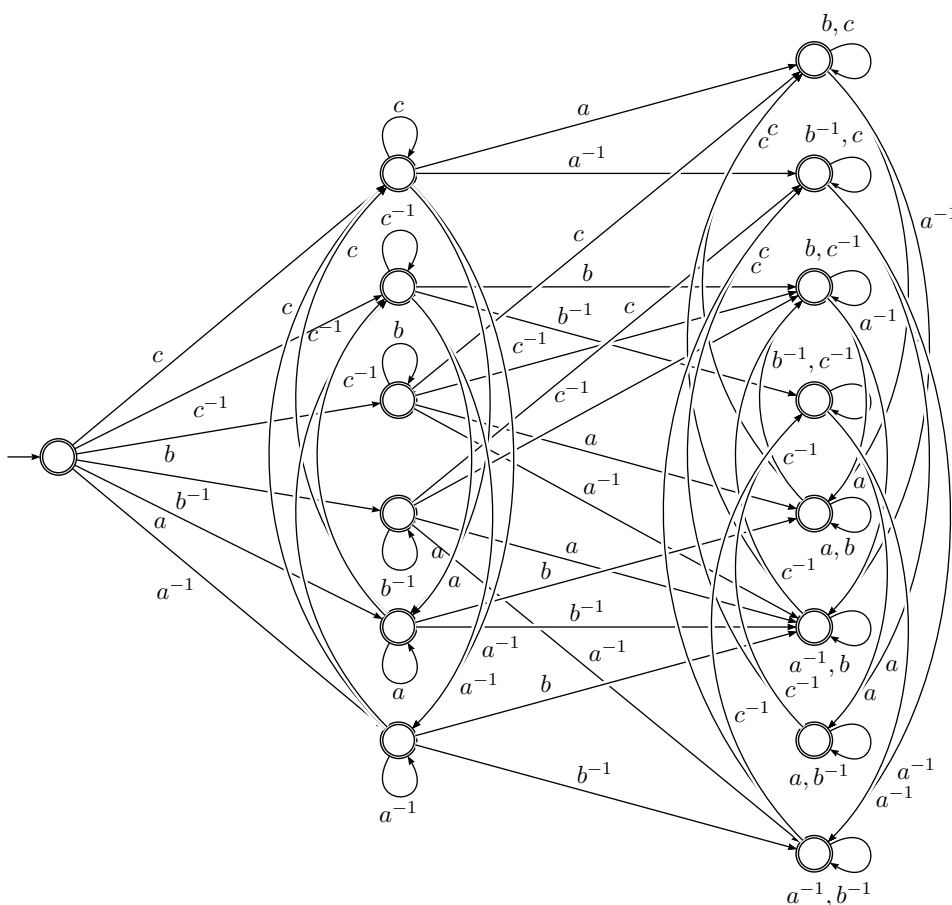


Abbildung 3.4: Dieser Automat akzeptiert die Geodäten von $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}$

Auch hier wurde der Fail-State weggelassen, so wie auch die Final-States, die keine Verbindung zum Start-State haben.

3.2 Hyperbolische Gruppen

In den folgenden Seiten wird ein kleiner Teil aus dem Gebiet der hyperbolischen Gruppen angeschnitten. Um weitere Informationen, Definitionen und Resultate zu erhalten, sei hier verwiesen auf das Buch von Martin Bridson und André Haefliger (4).

Eine Gruppe mit Präsentation $\langle A \mid R \rangle$ heisst *(Gromov)-hyperbolisch*, falls ihr metrisierter Cayley Graph ein hyperbolischer Raum ist. Obwohl der Cayley Graph von der Präsentation abhängt, kann man zeigen, dass diese Eigenschaft nur von der Gruppe abhängt.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Dreiecke in X sind gegeben durch drei Punkte $x, y, z \in X$ und drei Geodäten $[x, y]$, $[x, z]$ und $[y, z]$. Wobei $[x, y]$ eine Geodäte zwischen x und y , $[y, z]$ eine Geodäte zwischen y und z und $[x, z]$ eine Geodäte zwischen x und z ist. Dieses Dreieck heisst dann Δ_{xyz} . Hier sind Geodäten keine Wörter, sondern Strecken von kleinster Länge.

Definition 3.7

Seien $x, y, z \in X$. Das Dreieck Δ_{xyz} heisst δ -schlank, falls jeder Punkt $w \in [x, y]$ in der δ -Umgebung von $[y, z]$ oder $[x, z]$ liegt. Das heisst $[x, y] \subset B_\delta([x, z]) \cup B_\delta([y, z])$.

Definition 3.8

X heisst δ -hyperbolisch (im Sinne von Gromov), falls jedes Dreieck Δ_{xyz} δ -schlank ist.

Jede Kante des Cayley Graphen identifiziert man mit dem Einheitsintervall $[0, 1]$. Dadurch wird aus dem Cayley Graphen ein metrischer Raum.

Man kann sich nun fragen, ob das Graph Produkt von hyperbolischen Gruppen auch hyperbolisch ist. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall. Denn die Dreiecke im metrisierten Cayley Graphen von $\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle$ sind δ -schlank für jedes $\delta \geq 0$. Aber für jede Wahl von δ gibt es im Cayley Graphen von $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$ ein Dreieck, dass nicht δ -schlank ist. Da $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ das Graph Produkt $\Pi_\Gamma \mathbb{Z}$ ist, mit Γ der vollständige Graph mit zwei Knoten, erbt das Graph Produkt diese Struktur nicht. Allerdings kann man den Begriff der hyperbolischen Gruppe so verallgemeinern, dass das Graph Produkt diese Eigenschaft von seinen Knoten-Gruppen übernimmt. Dies sehen wir im folgenden Abschnitt.

3.3 Semihyperbolische Gruppe

Sei $G = \langle A \mid X \rangle$ eine Gruppenpräsentation und \mathcal{C} ihr metrisierter Cayley Graph.

Sei $\pi : A^* \rightarrow \mathcal{C}$ die Abbildung, die einem Wort $w \in A^*$ den dazugehörigen Knoten im Cayley Graphen zuordnet.

Sei $w = a_1 \dots a_n \in A^*$, definiere $p_w : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ stetig, so dass $p_w(k) = \pi(k)$ für alle

$k \leq n$ und $p_w(k) = \pi(a_n)$ für alle $k \geq n$.

Eine *Normalformenmenge* ist eine Teilmenge $N \subset A^*$, so dass es eine Bijektion zwischen N und G gibt.

Definition 3.9

Sei N eine Normalformenmenge und $\sigma := \{p_w \mid w \in N\}$. Dann heisst σ *Combing* und man schreibt für $p_w \sigma_\gamma$, falls w das Element γ präsentiert.

Definition 3.10

Es existiert $\lambda \geq 1$ und ein $\varepsilon \geq 0$, so dass für alle $\gamma \in G$ und alle $s, t \leq T_\gamma$ gilt

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \varepsilon \leq d_{\mathcal{C}}(\sigma_\gamma(t), \sigma_\gamma(s)) \leq \lambda|t - s| + \varepsilon,$$

wobei $T_\gamma \in [0, \infty)$ der Zeitpunkt ist, an dem σ_γ konstant wird. Dann heisst das Combing (λ, ε) -quasigeodätisch.

Definition 3.11

Sei \mathcal{P} die Menge der schlussendlich konstanten Pfade im Cayley Graphen \mathcal{C} . Ein *Bicombing* ist eine Abbildung $\sigma : G \times G \rightarrow \mathcal{P}$ mit $(x, y) \mapsto \sigma_{(x,y)}$, wobei $\sigma_{(x,y)}$ den gewählten Pfad zwischen x und y beschreibt. Das heisst $\sigma_{(x,y)}(0) = x$ und für ein bestimmtes T_y $\sigma_{(x,y)}(t) = y$ für alle $t \geq T_y$.

Definition 3.12

Ein Bicombing heisst *äquivariant*, falls

$$\gamma \cdot \sigma_{(x,y)}(t) = \sigma_{(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y)}$$

für alle $\gamma, x, y \in G$ und $t \geq 0$.

Definition 3.13

Ein Bicombing σ heisst *beschränkt*, falls es eine Konstante $B > 0$ gibt, so dass der Abstand

$$d_{\mathcal{C}}(\sigma_{(x,y)}(t), \sigma_{(z,w)}(t)) \leq B,$$

für alle $t \geq 0$ und $d_{\mathcal{C}}(x, z) \leq 1$ und $d_{\mathcal{C}}(y, w) \leq 1$. Diese Bedingung nennt man auch *fellow-traveler* Eigenschaft.

Definition 3.14

Ein Bicombing σ heisst *semihyperbolisch*, falls es quasigeodätisch, äquivariant und beschränkt ist.

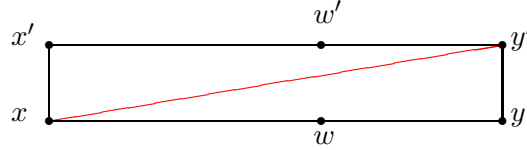
Eine Gruppe heisst *semihyperbolisch*, falls sie ein semihyperbolisches Bicombing besitzt.

Proposition 3.15 (Siehe (3) Seite 64, Proposition 1.3)

Sei G eine Gruppe. G ist semihyperbolisch, falls G hyperbolisch ist.

Beweis. Da G hyperbolisch ist, gibt es eine Konstante $\delta \geq 0$, so dass alle Dreiecke im metrisierten Cayley Graphen \mathcal{C} δ -schlank sind. Sei σ ein beliebiges geodätisches Bicombing und $x, x', y, y' \in X$ vier Punkte mit $d(x, x') \leq 1$ und $d(y, y') \leq 1$. Sei $w := \sigma_{(x,y)}(t)$ und $w' := \sigma_{(x',y')}(t)$.

Das Ziel ist es, einen Punkt \tilde{w} auf $[x', y']$ zu finden, so dass der Abstand $d(w, \tilde{w}) \leq 2\delta + 1$, da σ geodätisch ist, ist $\tilde{w} = \sigma_{(x',y')}(\tilde{t})$ für ein $\tilde{t} \in [0, \infty)$. Denn dann ist $d(w, w') \leq d(w, \tilde{w}) + d(\tilde{w}, w') \leq 2\delta + 1 + \tilde{t} - t$. Da $\tilde{t} - t \leq 2\delta + 2$ ist also der Abstand zwischen w und w' beschränkt durch $4\delta + 3$. Also ist σ ein beschränktes Bicombing.



Da das Bicombing geodätisch ist, ist w in einer δ -Umgebung von der Strecke $[x, y']$ oder von $[y, y']$.

Falls $w \in B_\delta([y, y'])$ gibt es ein $v \in [y, y']$ so dass der Abstand zwischen v und w durch δ beschränkt ist. Da $d(v, y') \leq 1$ ist $d(w, \tilde{w}) \leq \delta + 1$ für $\tilde{w} := y'$.

Falls $w \in B_\delta([x, y'])$ gibt es ein $v \in [x, y']$ mit $d(w, v) \leq \delta$. Wenn v in der δ -Umgebung von $[x', y']$ liegt, gibt es ein $\tilde{w} \in [x', y']$, so dass der Abstand zwischen \tilde{w} und v kleiner ist als δ . Damit ist $d(w, \tilde{w}) \leq 2\delta$. Wenn aber v in der δ -Umgebung von $[x, x']$ liegt, gibt es ein $v' \in [x, x']$, so dass der Abstand $d(v', v) \leq \delta$ und $d(v', x') \leq 1$. Sei $\tilde{w} := x'$ dann ist $d(w, \tilde{w}) \leq 2\delta + 1$.

In jedem Fall ist also der Abstand zwischen w und \tilde{w} durch $2\delta + 1$ beschränkt, d.h. $d(w, \tilde{w}) \leq 2\delta + 1$.

Also hat man ein geodätisches und beschränktes Bicombing. \square

Sei \mathfrak{G} eine endliche Menge von Gruppen und sei Γ ein Graph. $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ ist das Graph Produkt. Seien $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{Z}$ die symmetrischen Erzeugendensmengen der Knoten-Gruppen G_A, \dots, G_Z . Ein Wort aus \mathcal{I}^* , also der Menge der Wörter erzeugt durch das Erzeugendensystem \mathcal{I} , wird als w_I bezeichnet und präsentiert ein Element $g_I \in G_I$. Seien N_A, \dots, N_Z Normalformenmengen für G_A, \dots, G_Z , wobei das leere Wort die Normalform für das neutrale Element ist.

Das Ziel ist es aus N_A, \dots, N_Z eine Normalformenmenge für das Graph Produkt $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ zu konstruieren, das heisst $N \subset \Sigma^*$, wobei $\Sigma := \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \dots \cup \mathcal{Z}$. Dazu braucht man folgende Maschinerie.

Definition 3.16

Sei $w \in \Sigma^*$. Ein Unterwort w' heisst *lokales Wort*, falls $w' \in \mathcal{I}^*$ und es kein längeres Unterwort von w' gibt, das w' enthält und auch von der Knoten-Gruppe G_I kommt. Das lokale Wort w' hat den *Typ I* und man schreibt $w' = w_I$.

Jedes Wort $w \in \Sigma^*$ kann als Produkt von lokalen Wörtern geschrieben werden. Dann ist der *Typ* von w das Produkt der Typen der lokalen Wörter. Das heisst, falls $w = w_A w_B w_C w_A$ ist der Typ von w $ABCA$.

Definition 3.17

Die *globale Länge* eines Wortes $w \in \Sigma^*$ ist die Länge seines Typs, beziehungsweise die Anzahl lokaler Wörter, in die w zerlegt werden kann.

Falls $w = \dots w_I w_J \dots$ und die Knoten $\{v_I, v_J\} \in E(\Gamma)$, dann präsentiert $w' = \dots w_J w_I \dots$ dasselbe Element in $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ wie w . Auf diese Art kann man lokale Wörter nach links und nach rechts verschieben, ohne das dazugehörige Gruppenelement zu verändern. Wenn man ein lokales Wort verschiebt, kann es sein, dass es auf ein lokales Wort desselben Typs trifft. Falls diese Wörter inverse Elemente präsentieren, werden beide Wörter gelöscht. Mit dieser Operation verringert sich die globale Länge um zwei. Falls diese Wörter sich nicht zum trivialen Element kürzen lassen, wird aus den zwei lokalen Wörtern ein lokales Wort. Das neue Wort hat eine um eins kleinere globale Länge.

Aus allen Verschiebungen mit minimaler Länge, wählt man ein Wort aus, dessen Typ minimal bezüglich lexikographischer Ordnung ist. Die lexikographische Ordnung ist die Ordnung der Wörter wie in einem Lexikon. Das heisst für $w = x_1 x_2 \dots x_n$ und $w' = y_1 y_2 \dots y_m$, ist $w < w'$ falls $x_1 = y_1, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}$ und $x_i < y_i$ für ein $i \leq \min\{m, n\}$.

Diesen Vorgang nennt man *Aufasten*.

Anhand von dem folgenden Beispiel kann man sehen, dass das Aufasten nicht ein eindeutiges Element gibt.

Beispiel 3.18

Sei Γ



Abbildung 3.5: $\mathfrak{G} = \{G_A, G_B, G_C\}$

wobei $G_A \cong \mathbb{Z}^2$ und $G_B \cong \mathbb{Z} \cong G_C$. Dann kann das Wort $w = a_1 b a_1^{-1} c a_2$ durch Aufasten zu $a_1 a_1^{-1} a_2 b c$ oder zu $a_2 b c$ werden, je nachdem ob man zuerst b oder c verschiebt.

Dieses Problem kann man lösen, indem man verlangt, dass nach dem Aufasten jedes lokale Wort durch seine Normalform ersetzt wird.

Definition 3.19

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ heisst *echt*, falls

- (L) jedes lokale Wort in der Normalform seiner Knoten-Gruppe ist;
- (O) $w = \dots w_I \dots w_J \dots$ mit $I \geq J$ und $\{v_I, v_J\} \in E(\Gamma)$ gibt es ein lokales Wort w_K mit $w = \dots w_I \dots w_K \dots w_J \dots$ und v_K ist weder zu v_I noch zu v_J adjazent.

Proposition 3.20 (Siehe (9) Seite 9, Proposition 3.2)

Die Menge der echten Wörter bildet eine Normalform für $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$.

Beweis. Annahme: die natürliche Abbildung $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ ist eingeschränkt auf die echten Wörter nicht bijektiv.

Für jedes Element $\gamma \in \Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ gibt es ein Wort $w \in \Sigma^*$, das γ repräsentiert. Nach dem Aufasten von w und Ersetzen der lokalen Wörter durch ihre Normalformen erhält man ein echtes Wort, das γ repräsentiert. Also ist φ eingeschränkt auf die echten Wörter surjektiv, also nicht injektiv, da sie nach Annahme nicht bijektiv ist. Das heisst, es gibt zwei verschiedene echte Wörter w und w' die beide dasselbe Element darstellen. Da nach dem Aufasten eines Worts der Typ gleich ist wie der Typ eines dazugehörigen echten Worts, haben w und w' denselben Typ. Also gibt es in w' ein erstes lokales Wort, das nicht wie das dazugehörige lokale Wort in w aussieht, das heisst

$$\begin{aligned} w &= w_i w_j w_t \\ w' &= w_i w'_j w'_t \text{ mit } w_j \neq w'_j. \end{aligned}$$

Sei \tilde{w} die Normalform von $w_j^{-1} w'_j$, \tilde{w} ist nicht das leere Wort, da $w_j \neq w'_j$. Dann repräsentieren w_t und $\tilde{w} w'_t$ dasselbe Element in $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ und sind echt, allerdings haben sie nicht denselben Typ, weil w_t und w'_t denselben Typ haben, der nicht mit J anfängt und \tilde{w} nicht das leere Wort ist. Da aber echte Wörter die dasselbe Element darstellen denselben Typ haben, erhalten wir hier einen Widerspruch. \square

Korollar 3.21 (Siehe (9) Seite 13, Korollar 3.7)

Sei $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ ein Graph Produkt von endlich vielen Gruppen mit quasigeodätischen und beschränkten Combing. Dann ist das Combing erzeugt von den echten Wörtern auch quasigeodätisch und beschränkt.

Theorem 3.22 (Siehe (9) Seite 13, Theorem A)

Das Graph Produkt von endlich vielen semihyperbolischen Gruppen ist semihyperbolisch.

Beweis. Sei $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ ein Graph Produkt von endlich vielen semihyperbolischen Gruppen. Aus dem quasigeodätischen Combing kann man ein quasigeodätisches Bicombing machen, indem wir den Pfad von γ_1 nach γ_2 als Translation um den Faktor γ_1 des Pfads von 1 nach $\gamma_1^{-1} \gamma_2$ nehmen:

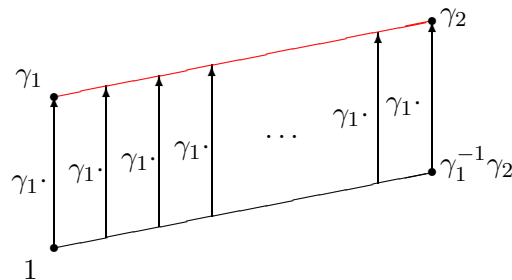


Abbildung 3.6: Konstruktion des Bicomblings

Dieses Bicombing ist äquivariant.

Bleibt noch zu zeigen, dass dieses Bicombing die fellow-traveler Eigenschaft besitzt. Das Combing erzeugt von den echten Wörtern ist beschränkt, deswegen erfüllt das Bicombing

$$d_{\mathcal{C}}(\sigma_{(\gamma_1, \gamma_2)}(t), \sigma_{(\gamma_3, \gamma_4)}(t)) \leq B,$$

falls $\gamma_1 = \gamma_3$ und $d_{\mathcal{C}}(\gamma_2, \gamma_4) \leq 1$. Das heisst, man muss noch zeigen, dass dies auch gilt für $d_{\mathcal{C}}(\gamma_1, \gamma_3) \leq 1$.

Wegen der Konstruktion des Bicomblings reicht es zu zeigen, dass diese Ungleichung stimmt, falls $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_3 = s$ für ein $s \in \Sigma$ und $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma$. Der Pfad von s nach γ ist nur eine Translation von dem Pfad von 1 nach $s^{-1}\gamma$. Sei nun w das echte Wort für γ und w' das echte Wort für $s^{-1}\gamma$. Dann erhält man das Wort w' durch Aufasten des Worts $s^{-1}w$.

Dann kann w dargestellt werden als Produkt $w_i w_s w_t$ und w' als $w_i s^{-1} w_s w_t$, wobei jedes lokale Wort von w_i mit s kommutiert und w_s vom selben Typ ist wie s . Wenn man nun $s^{-1}w_s$ durch die Normalform ersetzt, erhält man ein neues Wort w'_s . Dann ist das echte Wort von $s^{-1}\gamma$ also $w_i w'_s w_t$.

Da w_s und w'_s Normalformen vom selben Typ I sind, ist die Distanz zwischen den beiden dazugehörigen Combing Pfaden beschränkt durch $W_I(|\gamma|)$. Der längere Pfad ist höchstens um 1 länger und da das Combing quasigeodätisch ist, muss der längere Pfad den Endpunkt spätestens zum Zeitpunkt $\lambda_I(W_I(|\lambda|) + 1 + \varepsilon_I)$ erreichen. Daher ist die Distanz zwischen zwei Punkten höchstens $\lambda_I(W_I(|\lambda|) + 1 + \varepsilon_I) + 1$. \square

3.4 Automatische Gruppen

Um mehr über automatische Gruppen zu erfahren, siehe (7).

Definition 3.23

Eine Gruppe G mit Erzeuger A heisst *automatisch*, falls G ein beschränktes Combing hat, dessen assoziierte Normalform eine reguläre Sprache ist.

Theorem 3.24 (Siehe (9) Seite 14, Theorem B)

Das Graph Produkt von endlich vielen automatischen Gruppen ist automatisch.

Beweis. Sei also Γ ein Graph und $\mathfrak{G} := \{G_A, \dots, G_Z\}$ die Menge der Knoten-Gruppen und sei F_I der Automat, der die Normalform der Knoten-Gruppe G_I akzeptiert.

Das Ziel ist es, einen Automaten zu konstruieren, der die echten Wörter akzeptiert.

Zunächst konstruieren wir so etwas wie einen Automaten, der die Typen von echten Wörtern akzeptiert. Dieser heisst der *zulässige Graph*. Wir fassen die Menge der Typen als eine Normalform eines Graph Produkts von \mathbb{Z}_2 auf mit dem Graph Γ .

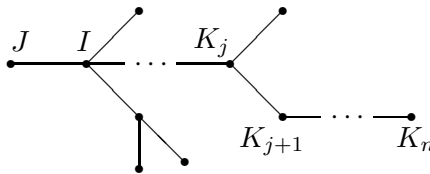
Ein String $JIK_1 \dots K_n$ ist *zulässig*, falls

- (i) $J > I$ und v_I und v_J sind in Γ nicht adjazent;
- (ii) $I < K_1 < K_2 < \dots < K_n$;
- (iii) Und falls $K_i \leq J$, dann ist v_J zu keinem der Knoten $v_I, v_{K_1}, \dots, v_{K_{i-1}}$ adjazent.

Zu diesen zulässigen Strings konstruiert man die *zulässigen Bäume*. Für ein Paar (J, I) mit $J > I$ und $\{v_I, v_J\}$ keine Kante von Γ macht man einen Baum, das heisst einen Graphen ohne Zykeln, indem man mit dem folgenden Baum anfängt.



Für jedes Wort $JIK_1 \dots K_n$ nimmt man das maximale Anfangswort $JIK_1 \dots K_j$, so dass dieser Pfad auf dem Baum liegt. Für $K_{j+1} \dots K_n$ gibt es einen neuen Ast auf dem Baum.



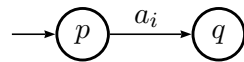
Damit kann man nun den zulässigen Graph definieren:

1. Wir fangen an mit einem Knoten für jede Knoten-Gruppe G_I und einen Anfangsknoten, von dem eine Kante zu jede allen anderen Knoten geht. Diese Kanten haben das Label I , falls die Knoten Gruppe vom Typ I ist. Dieser Graph heisst Δ .
2. Es gibt eine Kante von I nach J , falls $I < J$.
3. An jeden Knoten vom Typ I wird der (I, J) -zulässige Baum angeklebt. Die Vereinigung dieser angeklebten Bäume heisst *Hängender Baum*.
4. Im Hängenden Baum gibt es eine Kante von I nach J mit dem Label J , falls $I < J$.

Fasst man den zulässigen Graphen als Automaten auf, akzeptiert dieser die Sprache der Typen, die die echten Wörter haben können.

Um den Automaten zu konstruieren, modifiziert man die Automaten F_I , indem man noch einen Fail-State hinzufügt und für jeden Erzeuger $\notin \mathcal{I}$ eine Kante von jedem nicht-Final-State zu diesem Fail-State macht. Die Start-States werden gelöscht, damit sind es keine Automaten mehr. Diese modifizierten Graphen heissen \tilde{F}_I .

Sei $a_i \in \mathcal{A}$ ein Erzeuger der Knoten-Gruppe G_A . Im Automat \tilde{F}_A gibt es folgende Situation:



Dann heisst der State q a_i -Knoten. Genauso definiert man b_i, c_i, \dots -Knoten. Die Menge dieser Knoten heissen die *ersten States*.

Nun konstruieren wir den Graphen F folgendermassen.

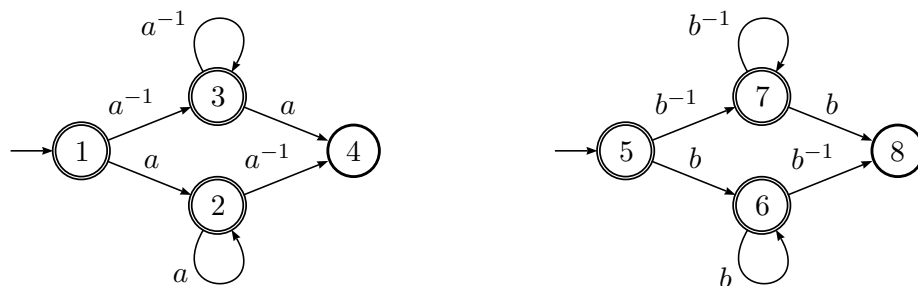
1. Sei q_0 der Start-State von F mache für jeden Typ I eine Kopie des Graphen \tilde{F}_I . Es gibt eine Kante von q_0 zu dem j_i -Knoten mit dem Label j_i für alle $j_i \in \Sigma$. Gibt es eine Kante in Δ von I nach J fügt man von jedem Final-State von \tilde{F}_I eine Kante zu dem j_i -Knoten von \tilde{F}_J mit dem Label hinzu j_i für alle ersten States von \tilde{F}_J .
2. Für jeden Schritt in der Konstruktion des zulässigen Baums nimmt man eine weitere Kopie von \tilde{F}_j hinzu und übersetzt die Kanten (I, J) auf dieselbe Weise wie oben.

□

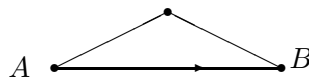
Um diesen konstruktiven Beweis zu illustrieren, führen wir die Konstruktion am folgenden Beispiel durch:

Beispiel 3.25

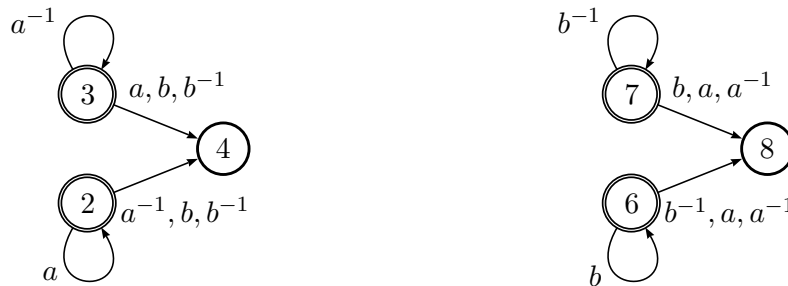
Sei $G_A = \langle a \mid \rangle$ und $G_B = \langle b \mid \rangle$, wobei $\mathcal{A} = \{a, a^{-1}\}$ und $\mathcal{B} = \{b, b^{-1}\}$. Und Γ sei der vollständige Graph mit zwei Knoten. Wie wir schon früher gesehen haben, sind die Automaten F_A und F_B folgendermassen



Da es keine (I, J) -zulässige Strings gibt, gibt es auch keine Hängenden Bäume. Also sieht der zulässige Graph so aus:



Die modifizierten Graphen \tilde{F}_A und \tilde{F}_B sehen folgendermassen aus:



Dann ist nach dem ersten Schritt der Konstruktion der Automat von dieser Form:

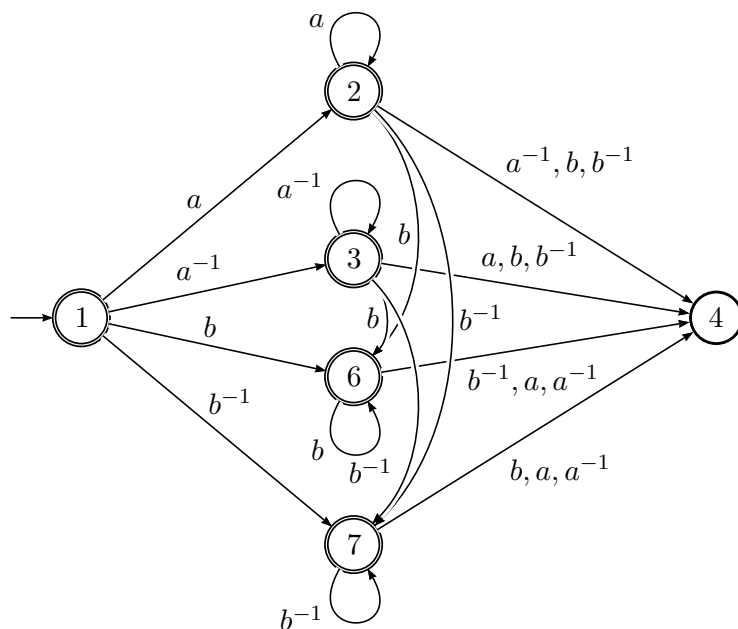


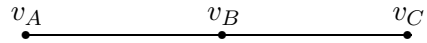
Abbildung 3.7: Dieser Automat akzeptiert die Sprache $\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Da es wie gesagt keine Hängende Bäume gibt, ist man hier fertig und der Automat akzeptiert die echten Wörter von $\Pi_\Gamma \mathfrak{G} = \mathbb{Z}^2$.

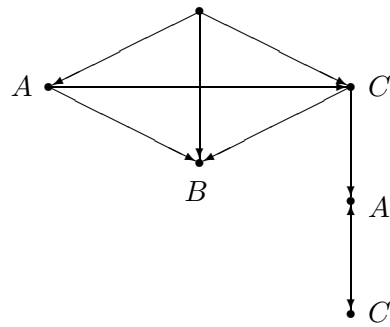
Um zu sehen was passiert, wenn es Hängende Bäume gibt, führen wir die Konstruktion noch am folgenden Beispiel aus.

Beispiel 3.26

Sei $G_A = \langle a \mid \rangle$, $G_B = \langle b \mid \rangle$ und $G_C = \langle c \mid \rangle$, wobei $\mathcal{A} = \{a, a^{-1}\}$, $\mathcal{B} = \{b, b^{-1}\}$ und $\mathcal{C} = \{c, c^{-1}\}$. Und sei Γ der folgende Graph.



Das heisst $\Pi_\Gamma \mathfrak{G} = \Pi_\Gamma \mathbb{Z} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Der zulässige Graph sieht folgendermassen aus:



Da die Knoten-Gruppen isomorph zu \mathbb{Z} sind, sind die modifizierten Graphen \tilde{F}_I gleich wie beim vorderen Beispiel.

Nach der Konstruktion von dem Beweis sieht der Automat F , der die Normalform von $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}$, akzeptiert folgendermassen aus:

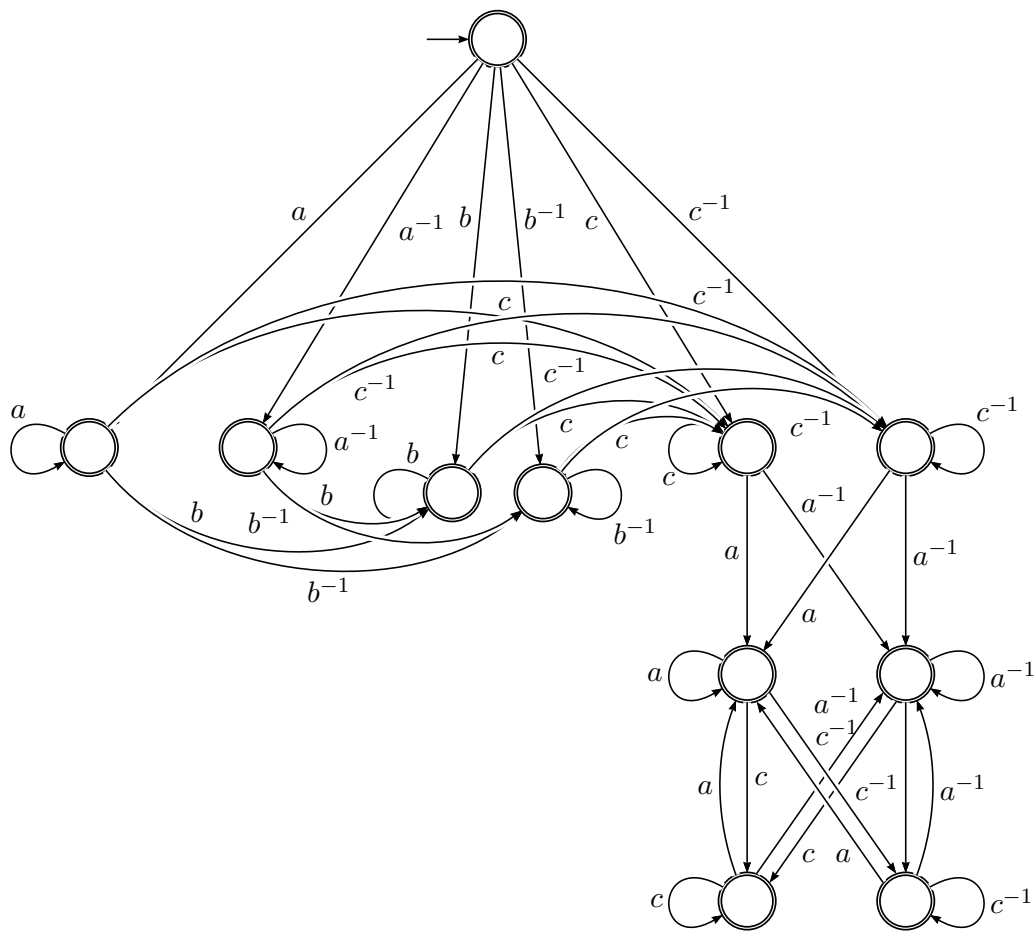


Abbildung 3.8: Dieser Automat akzeptiert die Normalform von $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

Hier wurden aus Platzgründen alle Fail-States weggelassen.

3.5 Termersetzungssystem

Die Definitionen und Resultate sind aus dem Artikel von Susan Hermiller und John Meier (9) und die deutsche Terminologie von der Internetseite (1).

Definition 3.27

Sei A ein Alphabet. Ein *Termersetzungssystem* ist eine Teilmenge $R \subset A^* \times A^*$. Die Elemente $(u, v) \in R$ schreibt man als $u \rightarrow v$ und heissen Termersetzungsregeln oder kurz Regeln.

Falls $x = w_1uw_2$, $y = w_1vw_2$ und $(u, v) \in R$, schreibt man

$$x \rightarrow y.$$

Falls es eine Folge $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$, $n \geq 1$ gibt mit

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

schreibt man $x \xrightarrow{*} y$. Falls $n > 1$ schreibt man $x \xrightarrow{+} y$.

Definition 3.28

Ein Element $x \in A^*$ heisst *irreduzibel*, falls es keine Regel gibt mit $x \rightarrow y$. Sonst heisst x *reduzibel*.

Definition 3.29

(A, R) ist ein Termersetzungssystem für einen Monoid M , falls $\langle A \mid v = w, (v, w) \in R \rangle$ ein Erzeugendensystem für M ist. (A, R) ist ein Termersetzungssystem für eine Gruppe, falls es ein Termersetzungssystem für die Gruppe als Monoid ist.

Beispiel 3.30

Sei $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \mid \rangle$ die freie Gruppe mit zwei Erzeugern. Dann ist (A, R) mit $A = \{a, b, \tilde{a}, \tilde{b}\}$ und $R = \{a\tilde{a} \rightarrow 1, \tilde{a}a \rightarrow 1, \tilde{b}b \rightarrow 1, b\tilde{b} \rightarrow 1\}$ ein Termersetzungssystem für die Gruppe G .

Definition 3.31

R heisst *Noethersch*, falls es für kein $x \in A^*$ eine unendliche Kette von Regeln, $x \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$, gibt.

Beispiel 3.32

Sei $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ die freie abelsche Gruppe mit zwei Erzeugern. Dann ist (A, R) mit $A = \{a, b, \tilde{a}, \tilde{b}\}$ und $R = \{a\tilde{a} \rightarrow 1, \tilde{a}a \rightarrow 1, \tilde{b}b \rightarrow 1, b\tilde{b} \rightarrow 1, ba \rightarrow ab, b\tilde{a} \rightarrow \tilde{a}b, \tilde{b}a \rightarrow a\tilde{b}, \tilde{b}\tilde{a} \rightarrow \tilde{a}\tilde{b}\}$ ein Noethersches Termersetzungssystem, denn jedes Element in $w \in A^*$ wird so lange ersetzt, bis das Element die Form $w' = a^n b^m, \tilde{a}^n \tilde{b}^m, a^n \tilde{b}^m$ oder $\tilde{a}^n b^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ hat. w' ist irreduzibel, also endet jede Kette von Regeln.

Beispielsweise hat man für $w = ab\tilde{a}b^2a$ mehrere Möglichkeiten Terme zu ersetzen:

$$w \rightarrow a\tilde{a}b^3a \rightarrow b^3a \rightarrow b^2ab \rightarrow bab^2 \rightarrow ab^3$$

oder

$$w \rightarrow ab\tilde{a}bab \rightarrow ab\tilde{a}ab^2 \rightarrow ab^3$$

oder

$$w \rightarrow ab\tilde{a}bab \rightarrow a\tilde{a}bab^2 \rightarrow bab^2 \rightarrow ab^3 \dots$$

Allerdings enden diese Ketten immer nach endlich vielen Schritten in einem irreduziblen Element.

Eine fundierte Menge ist eine Menge mit einer partiellen Ordnung und jede nichtleere Teilmenge hat ein minimales Element.

Mit Hilfe des Termersetzungssystems R können wir eine partielle Ordnung auf A^* definieren. Für zwei Elemente $x, y \in A^*$ gilt $x > y$, falls $x \xrightarrow{+} y$.

Bemerkung 3.33

Man kann zeigen, dass A^* bezüglich dieser Ordnung genau dann fundiert ist, wenn R Noethersch ist.

Beweis. “ \Rightarrow ”

Annahme: R ist nicht Noethersch.

Dann gibt es ein Element $x \in A^*$, so dass es eine unendliche Reihe von Termersetzungen gibt $x \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$. Sei $L := \{x, x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Da A^* fundiert ist, hat L ein minimales Element x_n . Da $x > x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$ erhalten wir einen Widerspruch zu der Annahme, dass die Reihe unendlich ist. Also ist R Noethersch.

“ \Leftarrow ”

Sei $L \subset A^*$ eine nichtleere Teilmenge.

Annahme: L hat kein minimales Element.

Das heisst, für jedes $x \in L$ gibt es ein $x_1 \in L$, so dass $x > x_1$. Für x_1 gibt es wieder ein $x_2 \in L$, so dass $x_1 > x_2$. Also erhält man eine unendliche Folge x, x_1, x_2, \dots mit der Eigenschaft, dass $x > x_1 > x_2 > \dots$. Was wiederum bedeutet, dass es eine unendliche Reihe $x \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ gibt. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass R Noethersch ist. \square

Definition 3.34

Ein Termersetzungssystem heisst *konfluent*, falls es für $x \xrightarrow{*} y_1$ und $x \xrightarrow{*} y_2$ immer ein z gibt, so dass $y_1 \xrightarrow{*} z$ und $y_2 \xrightarrow{*} z$.

Definition 3.35

Falls ein Termersetzungssystem konfluent und Noethersch ist, heisst es *konvergent*.

Beispiel 3.36

(A, R) , wie im Beispiel 3.32 ist konfluent, denn das irreduzible Element, das durch Termersetzung von einem Element x erreicht werden kann, ist eindeutig. Das heisst, $w \xrightarrow{*} a^n b^m$ egal welche Reihenfolge von Regeln man wählt. Also gilt für alle y_1, y_2 mit $w \rightarrow y_i$ dass $y_i \xrightarrow{*} a^n b^m$.

Bemerkung 3.37 (Siehe (13) Seite 226, Theorem 2)

M.H.A Newman hat bewiesen, dass ein Noethersches Termersetzungssystem genau dann konvergent ist, wenn jedes Element von dem Monoid des Termersetzungssystems von genau einem irreduzibles Wort repräsentiert wird.

Theorem 3.38

Das Graph Produkt von endlich vielen Gruppen, die ein konvergentes Termersetzungssystem haben, hat auch ein konvergentes Termersetzungssystem. Zusätzlich ist das Termersetzungssystem endlich, falls alle Knoten-Gruppen endliche Termersetzungssysteme haben.

Hier kann man nicht mit den echten Wörtern arbeiten, denn falls es im Graph Produkt diesen Untergraph gibt:

$$\mathbb{Z} = \langle a \mid \quad \quad \quad \mathbb{Z} = \langle b \mid \quad \quad \quad \mathbb{Z} = \langle c \mid \rangle$$

Abbildung 3.9: Untergraph von Γ

mit $a < b < c$. Dann ist $R_I = \{i\tilde{i} \rightarrow 1, \tilde{i}i \rightarrow 1\}$ und es gäbe eine Regeln, so dass $ca^n b \xrightarrow{+} bca^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies kann nicht mit einer endlichen Menge von Regeln erreicht werden.

Beweis. Seien G_I die Knotengruppe und (\mathcal{I}, R_I) die dazugehörigen Termersetzungssysteme. Dann definiert man das Alphabet von dem Graph Produkt folgendermassen:

$$\Lambda := \{\alpha = (\alpha_A, \dots, \alpha_Z) \mid \alpha_i \in \mathcal{I} \cup \{1_I\} \text{ und } \{v_I \mid \alpha_I \neq 1_I\} \text{ ist eine nichtleere Menge von Knoten in eine kompletten Untergraphen von } \Gamma\}.$$

Das heisst ein Element in Λ^* ist $\alpha_1 \dots \alpha_n$ mit $\alpha_i = (\alpha_{iA}, \dots, \alpha_{iZ})$.

Das Termersetzungssystem R besteht aus folgenden Regeln.

- 1) $(\alpha_A, \dots, 1_I, \dots, \alpha_Z)(\beta_A, \dots, \beta_I, \dots, \beta_Z) \rightarrow (\alpha_A, \dots, \beta_I, \dots, \alpha_Z)(\beta_A, \dots, 1_I, \dots, \beta_Z)$, falls $\beta_I \neq 1_I$. Falls $(\alpha_A, \dots, \beta_I, \dots, \alpha_Z) \notin \Lambda$, gibt es keine Regel.
- 2) $\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow \beta_1, \dots, \beta_n$, wobei:
 - (i) $\alpha_{iJ} = \beta_{iJ}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $I \neq J$.
 - (ii) $\alpha_{1I} \dots \alpha_{mI} \rightarrow \beta_{1I} \dots \beta_{kI}$ ist eine Regel in R_I .
 - (iii) Falls $k \leq m$ ist $m = n$, und falls $k < m$ ist $\beta_{iI} = 1_I$ für alle $k < i \leq m$
 - (iv) Falls $k > m$ ist $n = k$ und $\beta_{iJ} = 1_J$ für alle $m < i \leq n$ und $J \neq I$.

$(1_A, \dots, 1_Z)$ wird ersetzt durch 1_Λ . Nun muss man zeigen dass (Λ, R) ein konvergentes Termersetzungssystem für das Graph Produkt ist. Dies tun wir in folgender Reihenfolge. Zuerst zeigen wir, dass es ein Termersetzungssystem für das Graph Produkt ist, dann dass es Noethersch und zuletzt, dass es konvergent ist.

Lemma 3.39

(Λ, R) ist ein Termersetzungssystem für das Graph Produkt $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$.

Beweis. Man muss zeigen, dass (Λ, R) ein Termersetzungssystem für $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ als Monoid ist.

Sei also M der Monoid mit dem Termersetzungssystem (Λ, R) .

Sei $\Sigma := \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \dots \cup \mathcal{Z}$. Σ ist eine Erzeugendenmenge des Monoids $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$. Sei $\theta : \Sigma^* \rightarrow \Lambda^*$ die Abbildung, die erzeugt wird durch

$$\mathcal{I} \ni i_I \mapsto (1_A, \dots, i_I, \dots, 1_Z) \in \Lambda.$$

Sei $\Sigma' := \theta(\Sigma)$. Die zweite Regel zeigt, dass die Relationen, die in G_I gelten durch die Erzeuger in Σ' gewährleistet sind, da falls $\alpha_I = \alpha_{1I} \cdots \alpha_{mI} =_{G_I} 1_I$, dann gibt es in R die Regel

$$(1_A, \dots, \alpha_{1I}, \dots, 1_Z) \cdots (1_A, \dots, \alpha_{mI}, \dots, 1_Z) \rightarrow 1_A.$$

Und die erste Regel garantiert die Kommutationseigenschaften des Graph Produkts und sie zeigt auch, dass alle Erzeuger in Λ , die nicht in Σ' sind, durch ein Produkt aus Erzeuger von Σ' erreicht werden kann. Sei zum Beispiel $(1_A, \dots, \alpha_I, \dots, \alpha_J, \dots, 1_Z) \in \Lambda \setminus \Sigma'$. Dann folgt, dass die Knoten v_I und v_J in Γ benachbart sind. Also gibt es eine Regel

$$(1_A, \dots, \alpha_I, \dots, 1_Z)(1_A, \dots, \alpha_J, \dots, 1_Z) \rightarrow (1_A, \dots, \alpha_I, \dots, \alpha_J, \dots, 1_Z).$$

Also ist M genau der Monoid von $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$. □

Lemma 3.40

(Λ, R) ist Noethersch.

Beweis. Man muss zeigen, dass die Ordnung auf Λ^* , gegeben durch $v > w$, falls $v \rightarrow w$ fundiert ist. Da jede Knotengruppe G_I ein konvergentes Termersetzungssystem hat, ist die dadurch definierte Ordnung auf \mathcal{I} auch fundiert. Notiere $>_I$ für die Ordnung auf \mathcal{I} . Sei φ_I eine Abbildung von Λ^* nach \mathcal{I}^* mit

$$\alpha_1 \cdots \alpha_m \mapsto \alpha_{1I} \cdots \alpha_{mI}.$$

Sei $\varphi = (\varphi_A, \dots, \varphi_Z) : \Lambda^* \rightarrow \mathcal{A}^* \times \dots \times \mathcal{Z}^*$. Definiere eine Ordnung $>_\Pi$ auf $\mathcal{A}^* \times \dots \times \mathcal{Z}^*$ so dass $(v_A, \dots, v_Z) >_\Pi (w_A, \dots, w_Z)$, wenn $v_I \geq_I w_I$ für alle $A \geq I \leq Z$ und es existiert ein J , so dass $v_J >_J w_J$.

Sei $>_{lex}$ eine Ordnung auf Λ^* so dass $\alpha >_{lex} \beta$, falls $|\{v_I \mid \alpha_I \neq 1_I\}| < |\{v_I \mid \beta_I \neq 1_I\}|$.

Sei $v \rightarrow w$ eine Regel in R , mit $v = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ und $w = \beta_1 \cdots \beta_n$. Wenn diese Regel vom ersten Typ ist, dann ist

$$\begin{aligned} v &= (\alpha_{1A}, \dots, 1_I, \dots, \alpha_{1Z})(\alpha_{2A}, \dots, \alpha_{2I}, \dots, \alpha_{2Z}) \\ &\rightarrow (\alpha_{1A}, \dots, \alpha_{2I}, \dots, \alpha_{1Z})(\alpha_{2A}, \dots, 1_I, \dots, \alpha_{2Z}) = w. \end{aligned}$$

Somit gilt $\varphi_A(v) = \alpha_{1A}\alpha_{2A} = \varphi_A(w), \dots, \varphi_I(v) = \alpha_{2I} = \varphi_I(w), \dots, \varphi_Z(v) = \alpha_{1Z}\alpha_{2Z} = \varphi_Z(w)$. Dann ist $v >_{lex} w$.

Wenn die Regel vom zweiten Typ ist, dann ist $\varphi_J(v) = \varphi_J(w)$ für alle $J \neq I$ und $\varphi_I(v) >_I \varphi_I(w)$, das heisst $v >_\pi w$. Das heisst für alle Termersetzungen $x \rightarrow y$ gilt $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ und falls $\varphi(x) = \varphi(y)$, ist $x >_{lex} y$.

Sei also $\Upsilon \subset \Lambda^*$ eine beliebige nichtleere Teilmenge. Dann definiert man folgende zwei Teilmengen von Υ :

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= \{w \in \Upsilon \mid w \text{ ist minimal bezüglich } >_{pi}\} \\ \Upsilon_2 &= \{w \in \Upsilon_1 \mid w \text{ ist minimal bezüglich } >_{lex}\}\end{aligned}$$

Da $>_\pi$ eine fundierte Ordnung ist, ist Υ_1 nicht die leere Menge. Da $>_{lex}$ eine fundierte Ordnung ist, ist Υ_2 nicht die leere Menge.

Das heisst es gibt mindestens ein Element $x \in \Upsilon_2$. Nehme an, x nicht minimal in Υ bezüglich der Ordnung auf Λ^* , definiert durch $v > w$, falls $v \xrightarrow{+} w$. Das heisst, es gibt ein $x_1 \in \Upsilon \setminus \{x\}$ so dass $x \xrightarrow{+} x_1$, dann gilt aber $\varphi(x) \geq \varphi(x_1)$, das heisst $x_1 \in \Upsilon_1$, $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ und damit ist $x >_{lex} x_1$, was aber der Voraussetzung widerspricht, dass x minimal bezüglich $>_{lex}$ in Υ ist.

Also ist die Annahme falsch und x minimal bezüglich $>$. □

Lemma 3.41

(Λ, R) ist konvergent.

Beweis. Nach dem Theorem von Newman 3.37, reicht es zu zeigen, dass die Menge der irreduziblen Wörter eine Normalformenmenge ist. Im Termersetzungssystem (Λ, R) haben die irreduziblen Wörter die Form $\alpha_1 \cdots \alpha_m$, so dass

- (L) falls $\alpha_{iJ} \neq 1_J$ für $k \leq i \leq l$, ist $\alpha_{kJ} \cdots \alpha_{lJ}$ ein irreduzibles Wort im Termersetzungssystem der Knotengruppe G_J ;
- (O) falls $\alpha_{iJ} = 1_J$ und $\alpha_{(i+1)J} \neq 1_J$ gibt es einen Knoten v_K , der zu v_J nicht benachbart ist, so dass $\alpha_{iK} \neq 1_K$.

Falls es einen nicht-benachbarten Knoten v_K gibt mit $\alpha_{iK} \neq 1_K$, kann man die erste Regel für das Unterwort $\alpha_i \alpha_{(i+1)}$ nicht mehr anwenden. Und wenn alle Unterwörter von $\alpha_{1I} \cdots \alpha_{mI}$ irreduzibel sind, kann man keine Regel vom Typ zwei anwenden. Die Elemente, welche die Bedingungen (L) und (O) erfüllen sind also irreduzibel. Umgekehrt gilt auch, falls ein Element irreduzibel ist, erfüllt es die Bedingungen (L) und (O).

Nun zeigen wir, dass es eine Bijektion zwischen den echten Wörtern und den irreduziblen Elementen gibt.

Sei $\theta : \Sigma^* \rightarrow \Lambda^*$ wie im Lemma 3.39. Da alle Knoten-Gruppen ein konvergentes Termersetzungssystem haben, ist die Menge der irreduziblen Wörter eines Termersetzungssystems eine Normalformenmenge. Also kann man die echten Wörter für das Graph Produkt definieren. Eine Regel vom Typ zwei kann man nicht anwenden, da jedes lokale Wort von w in seiner Normalform ist. Sei also $w \in \Sigma^*$ ein echtes Wort, das ein Element $\gamma \in \Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ präsentiert. Durch die wiederholte Anwendung von Regeln des Typs eins auf $\theta(w)$ erhält man ein eindeutiges Wort unabhängig von der Reihenfolge der Anwendung der Regeln.

Eine Typ-2-Regel kann man zu keinem Zeitpunkt anwenden. Das heisst, man erhält ein eindeutiges irreduzibles Wort $\sigma(w)$, das dasselbe Element γ darstellt wie w .

Sei $\psi : \Lambda^* \rightarrow \Sigma^*$, definiert durch $\psi(\alpha) = \alpha_A \cdots \alpha_Z$. Sei $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ ein irreduzibles Wort in Λ^* . Normalerweise ergibt der Prozess vom Aufasten 3.3 kein eindeutiges Wort. Da aber jedes Unterwort eines lokalen Worts in einem irreduziblen Wort irreduzibel ist und das einzige irreduzible Wort, das das triviale Element präsentiert 1_I ist und kein triviales Element weggekürzt wird, ist das Aufasten eindeutig. Das Aufasten von $\psi(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$ sei also $\tau(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$. Aufasten von $\psi(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$ hat genau den umgekehrten Effekt von der Anwendung der Regel 2. Deshalb ist $\tau \circ \sigma$ die Identität auf den echten Wörtern und $\sigma \circ \tau$ die Identität auf den irreduziblen Wörtern. Also gibt es eine Bijektion zwischen den irreduziblen Wörtern und den echten Wörtern. Da die echten Wörter nach der Proposition 3.20 in eine Normalformenmenge bilden, sind die irreduziblen Wörter auch eine Normalformenmenge. \square

Damit hat man bewiesen, dass (Λ, R) ein konvergentes Termersetzungssystem für $\Pi_{\Gamma} \mathfrak{G}$ ist.

Durch die Definition von R folgt direkt, dass falls alle Termersetzungssysteme der Knoten-Gruppen endlich sind, auch R endlich ist. \square

Definition 3.42

Ein Termersetzungssystem (A, R) heisst *regulär*, falls die Menge $\{u \mid (u, v) \in R\}$ eine reguläre Sprache ist.

Ein endliches Termersetzungssystem ist immer regulär, da jede endliche Sprache regulär ist.

Lemma 3.43

Haben alle Knoten-Gruppen ein reguläres Termersetzungssystem, so hat das Graph Produkt auch ein endliches Termersetzungssystem.

Beweis. Sei (Λ, R) das Termersetzungssystem, das im Beweis des vorderen Theorems benutzt wurde. Da die irreduziblen Wörter genau die sind, die kein Unterwort u mit $(u, v) \in R$ enthalten, ist die Menge der irreduziblen Wörter genau dann regulär, wenn die Sprache $\{u \mid (u, v) \in R\}$ regulär ist, das heisst genau dann, wenn das Termersetzungssystem regulär ist.

Sei F_I der deterministische Automat, der die irreduziblen Wörter des Termersetzungssystems von G_I akzeptiert. $F_I = (Q_I, \mathcal{I}, \delta_I, p_I, P_I)$ und sei $\delta_I(q_I, 1_I) = p_I$ für alle $q_I \in Q_I$. Da jedes Unterwort von einem irreduziblen Wort irreduzibel ist, hat F_I bis auf einen Fail-State nur Final-States.

Sei $\Lambda^+ = \Lambda \cup \{1\}$. Sei nun $F = (Q, \Lambda^+, \delta, p, P)$ ein neuer Automat und $Q = (P_A \times \cdots \times P_Z \times \Lambda) \cup f$, wobei f der Fail-State ist und $p = (p_A, \dots, p_Z, 1)$.

Sei $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \Lambda^+$ dann ist Abbildung δ folgendermassen definiert.

$$\delta((q_A, \dots, q_Z, \beta), \alpha) = (\delta_A(q_A, \alpha_A) \dots, \delta_Z(q_Z, \alpha_Z), \alpha)$$

falls

- a) $\beta\alpha$ irreduzibel ist bezüglich der Regeln des Typs 1 in R
- b) $\delta_I(q_I, \alpha_I) \in P_I$, das heisst es ist ein Final-State für alle I .

Sonst ist $\delta((q_A, \dots, q_Z, \beta), \alpha) = 1$.

F akzeptiert die irreduziblen Wörter von (Λ, R) und somit hat $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ ein reguläres Termersetzungssystem. \square

Beispiel 3.44

Wir führen nun die Konstruktion des Termersetzungssystem und des Automaten, der die irreduziblen Wörter davon akzeptiert am Beispiel $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ für Γ

$$\bullet \mathbb{Z}_2 = \langle c \mid c^2 \rangle$$

$$\overline{\bullet \mathbb{Z}_2 = \langle a \mid a^2 \rangle \quad \bullet \mathbb{Z}_2 = \langle b \mid b^2 \rangle}$$

und $\mathfrak{G} = \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\}$ durch.

Sei $\mathcal{A} = \{a\}$, $P_A = \{a^2 \rightarrow 1_A\}$, $\mathcal{B} = \{b\}$, $P_B = \{b^2 \rightarrow 1_B\}$ und $\mathcal{C} = \{c\}$, $P_C = \{c^2 \rightarrow 1_C\}$.

Dann ist $\Lambda = \{\alpha = (a, 1_B, 1_C), \beta = (1_A, b, 1_C), \gamma = (1_A, 1_B, c), \rho = (a, b, 1_C)\}$ und

$$R = \{ \begin{array}{l} 1) \quad \alpha\beta \rightarrow \rho, \alpha\rho \rightarrow \rho\alpha, \beta\alpha \rightarrow \rho, \beta\rho \rightarrow \rho\beta \\ 2) \quad \alpha^2 \rightarrow 1, \beta^2 \rightarrow 1, \gamma^2 \rightarrow 1, \rho\beta \rightarrow \alpha, \beta\rho \rightarrow \alpha, \alpha\rho \rightarrow \beta, \rho\alpha \rightarrow \beta, \rho^2 \rightarrow \alpha^2 \end{array} \}.$$

Die Sprache der irreduziblen Wörter von (\mathcal{I}, R_I) ist regulär und der dazugehörige Automat sieht so aus:

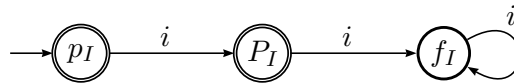


Abbildung 3.10: Dieser Automat akzeptiert die irreduziblen Wörter von \mathbb{Z}_2

Das heisst $F_I = (\{p_I, P_I, f_I\}, \mathcal{I}, \delta_I, p_I, \{p_I, P_I\})$ mit $\delta_I(p_I, i) = P_I$, $\delta_I(P_I, i) = f_I$ und $\delta_I(f_I, i) = f_I$.

Dann sieht der Automat, der die irreduziblen Wörter von (Λ, R) akzeptiert folgendermaßen aus.

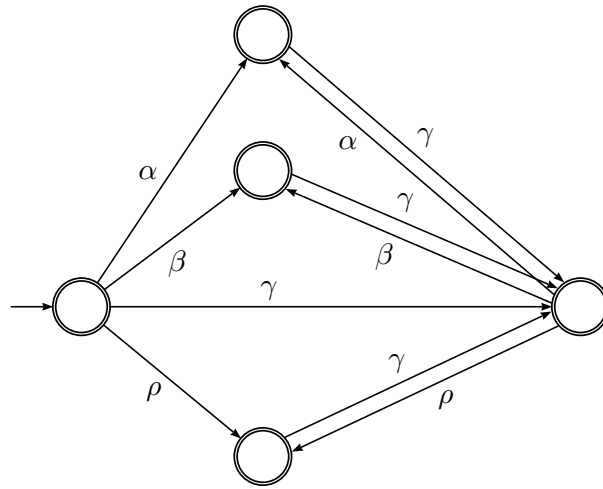


Abbildung 3.11: Dieser Automat akzeptiert die irreduziblen Wörter von $\mathbb{Z}_2^2 * \mathbb{Z}_2$

Hier wurde der Fail-State f der Einfachheit halber weggelassen.

Kapitel 4

Sphärisches und geodätisches Wachstum

Am Anfang dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit der Frage wann zwei RAAGs dasselbe geodätische Wachstum haben. Dann berechnen wir das sphärische Wachstum von Graph Produkten für Bäume und das geodätische Wachstum für das freie und direkte Produkt. Im letzten Abschnitt sehen wir dann Gruppen, die polynomielles geodätisches Wachstum haben.

4.1 Überlagerungen von Graphen

Definition 4.1

Sei Γ ein Graph und $v \in \Gamma$ ein Knoten. Der *Stern* von v , $\text{ster}(v)$ sind die Knoten von $V(\Gamma)$, die adjazent zu v sind und v selber.

Beispiel 4.2

Sei Γ der folgende Graph. Dann ist der Stern von $v_5 \in V(\Gamma)$ gegeben durch die rot gekennzeichneten Knoten:

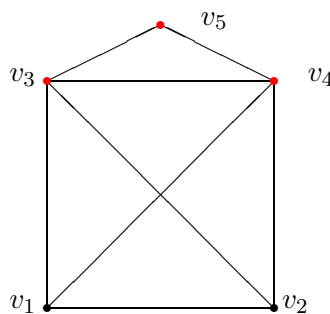


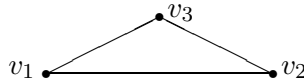
Abbildung 4.1: Der Stern von v_5 ist $\{v_3, v_4, v_5\}$

Definition 4.3

Seien Γ und Ξ zwei Graphen und $\phi : \Xi \rightarrow \Gamma$ eine Surjektion. ϕ ist eine *Überlagerung*, falls für alle $v \in V(\Gamma)$ die Abbildung ϕ beschränkt auf die Umgebung $\text{ster}(v)$ eine Bijektion auf die Umgebung $\text{ster}(\phi(v))$ ist. Ξ heisst *Überlagerungsgraph* oder *Lift* von Γ . Eine Überlagerung heisst n -Überlagerung falls das Urbild von jedem Knoten $v \in V(\Gamma)$ genau n Elemente enthält, das heisst $|\phi^{-1}(v)| = n$.

Beispiel 4.4

Sei $\Gamma = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}\})$ der vollständige Graph mit drei Knoten:



Von Γ gibt es zwei verschiedene 2-Überlagerungen.

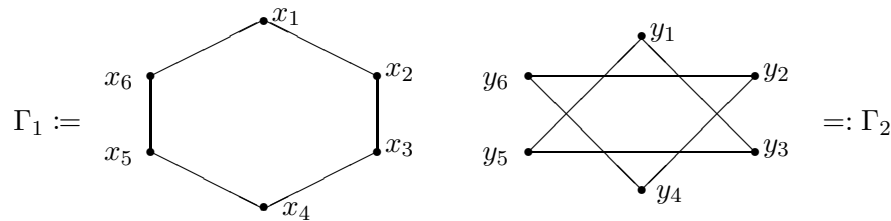


Abbildung 4.2: Zwei Überlagerungen von Γ

Vermutung von Jon McCammond: Falls zwei Graphen n -Überlagerungen von demselben Graph sind sind die Geodätischen Wachstumsreihen der RAAGs dieser Graphen gleich.

Diese Vermutung liess sich durch das folgende Gegenbeispiel widerlegen.

Gegenbeispiel 4.5

Γ_1 und Γ_2 in der Abbildung 4.2 sind beide 2-Überlagerungen von dem kompletten Graph mit drei Knoten. Aber $G_1 := \Pi_{\Gamma_1}\mathbb{Z}$ und $G_2 := \Pi_{\Gamma_2}\mathbb{Z}$ haben nicht dasselbe geodätische Wachstum.

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die geodätische Wachstumsreihe von G_1 und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die geodätische Wachstumsreihe von G_2 .

Der *Grad* eines Knotens $\text{deg}(v)$ ist die Anzahl Kanten, die diesen Knoten berühren. Die Liste (d_1, d_2, \dots, d_n) mit $d_i = \text{deg}(v_i)$ heisst *Valenzreihe*. Üblicherweise werden die Knoten von einem Graphen so numeriert, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

Da die Anzahl Knoten und Kanten und die Valenzreihe der beiden Graphen gleich sind, ist $a_i = b_i$ für alle $i \leq 4$. Allerdings ist die Anzahl Geodäten der Länge fünf in G_1 und G_2 verschieden ($a_5 \neq b_5$). Dies kann man folgendermassen zeigen.

Sei l_5 die Anzahl reduzierter Wörter der Länge fünf, die man mit einem Alphabet von sechs Buchstaben schreiben kann. Sei a'_5 die Anzahl Nicht-Geodäten der Länge fünf in G_1 und b'_5 die Anzahl Nicht-Geodäten der Länge fünf in G_2 . Da $a_5 = l_5 - a'_5$ und $b_5 = l_5 - b'_5$ reicht es zu zeigen, dass $a'_5 \neq b'_5$.

Sei S_i die Menge der Nicht-Geodäten der Länge 5 in G_1 , die ein Unterwort der Form $x_i^{\pm 1} w(\text{ster}(x_i)) x_i^{\mp 1}$ haben. Die Vereinigung dieser S_i ist die Menge aller Nicht-Geodäten der Länge fünf. Also ist

$$\begin{aligned} a'_5 &= \left| \bigcup_{i=1}^6 S_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^6 |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |S_i \cap S_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \dots \end{aligned}$$

Da aber für $i < j < k$ ein Wort in $S_i \cap S_j \cap S_k$ mindestens die Buchstaben $x_i, x_i^{-1}, x_j, x_j^{-1}, x_k$ und x_k^{-1} enthalten muss, enthält das Wort mehr als fünf Buchstaben. Also ist der Schnitt $S_i \cap S_j \cap S_k$ leer. Das heisst

$$a'_5 = \sum_{i=1}^6 |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |S_i \cap S_j|.$$

Mit derselben Argumentation erhält man für $P_i := \{\text{Nicht-Geodäten der Länge 5 in } G_2, \text{ die ein Unterwort der Form } y_i^{\pm 1} w(\text{ster}(y_i)) y_i^{\mp 1} \text{ haben}\}$, dass

$$b'_5 = \sum_{i=1}^6 |P_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |P_i \cap P_j|$$

ist.

Da $|\text{ster}(x_i)| = |\text{ster}(y_j)| = 3$ für alle $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ gilt

$$|P_1| = |P_2| = \dots = |P_6| = |S_1| = |S_2| = \dots = |S_6|.$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^6 |S_i| = \sum_{i=1}^6 |P_i|.$$

Daher reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 6} |S_i \cap S_j| \neq \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |P_i \cap P_j|.$$

Falls $j \neq i + 1 \pmod 6$ oder $j \neq i - 1 \pmod 6$, ist x_i nicht in $\text{ster}(x_j)$. Also ist $S_i \cap S_j = \emptyset$. Aus demselben Grund ist $P_i \cap P_j = \emptyset$, falls $j \neq i + 2 \pmod 6$ oder $j \neq i - 2 \pmod 6$.

Da es genausoviele Tupel (i, j) mit $j \neq i+1 \pmod 6$ oder $j \neq i-1 \pmod 6$ wie Tupel (k, l) mit $k \neq l+2 \pmod 6$ oder $k \neq l-2 \pmod 6$ gibt reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^6 |S_i \cap S_{i+1}| \neq \sum_{j=1}^6 |P_j \cap P_{j+2}|.$$

Darüber hinaus gilt $|S_i \cap S_{i+1}| = |S_1 \cap S_2|$ und $|P_i \cap P_{i+2}| = |P_1 \cap P_3|$ für alle $i = 1, \dots, 6$. Also reicht es zu zeigen, dass $|S_1 \cap S_2| \neq |P_1 \cap P_3|$.

Sei $w \in S_1 \cap S_2$. Dann hat w die Form $x_j^{\pm 1} x_i^{\pm 1} p x_i^{\mp 1} x_j^{\mp 1}$, wobei $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ und $p \in \text{ster}(x_1) \cap \text{ster}(x_2)$ oder die Form $p_1 x_j^{\pm 1} p_2 x_i^{\pm 1} p_3 x_j^{\mp 1} p_4 x_i^{\mp 1} p_5$, wobei $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ und alle p_k ausser ein p_l gleich 1 sind und $p_l \in \text{ster}(x_1) \cap \text{ster}(x_2)$.

Dasselbe gilt für die Wörter $w \in P_1 \cap P_3$. Das heisst, die Wörter sind von der Form $y_j^{\pm 1} y_i^{\pm 1} p y_i^{\mp 1} y_j^{\mp 1}$, wobei $i, j \in \{1, 3\}$, $i \neq j$ und $p \in \text{ster}(y_1) \cap \text{ster}(y_3)$ oder von der Form $p_1 y_j^{\pm 1} p_2 y_i^{\pm 1} p_3 y_j^{\mp 1} p_4 y_i^{\mp 1} p_5$, wobei $i, j \in \{1, 3\}$, $i \neq j$ und alle p_k ausser ein p_l gleich 1 sind und $p_l \in \text{ster}(y_1) \cap \text{ster}(y_3)$.

Da $\text{ster}(x_1) \cap \text{ster}(x_2) = \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}\}$ und $\text{ster}(y_1) \cap \text{ster}(y_3) = \{y_1^{\pm 1}, y_3^{\pm 1}, y_5^{\pm 1}\}$, kann man für p_l und p in $P_1 \cap P_3$ mehr Buchstaben einsetzen als in $S_1 \cap S_2$. Also gilt

$$|S_1 \cap S_2| < |P_1 \cap P_3|.$$

Damit ist auch

$$a'_5 = \sum_{i=1}^6 |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |S_i \cap S_j| > \sum_{i=1}^6 |P_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |P_i \cap P_j| = b'_5.$$

Und dadurch ist $a_5 < b_5$. Insbesondere ist $a_5 \neq b_5$.

Da also die Vermutung von McCammond nicht richtig war und die Graphen Γ_1 und Γ_2 sehr viele Eigenschaften gemein haben, liegt die Vermutung nahe, dass eine viel strengere Bedingung gelten muss, damit zwei Graphen dasselbe geodätische Wachstum haben. Aufgrund der Arbeit von Grigorchuk und Nagnibeda in (8) denken wir, dass zwei symmetrische Graphen, die keine Dreiecke enthalten dasselbe geodätische Wachstum haben. Ein symmetrischer Graph ist ein Graph mit n Knoten und die Valenzreihe dieses Graphen ist (k, k, \dots, k) mit $0 \leq k \leq n$.

Theorem 4.6 (Siehe (10) Seite 329, Isomorphism Theorem for Graph Groups)

Seien Γ und Δ zwei Graphen, die die Gruppen $\Pi_\Gamma \mathbb{Z}$ bzw. $\Pi_\Delta \mathbb{Z}$ definieren. Falls $\Pi_\Gamma \mathbb{Z} \cong \Pi_\Delta \mathbb{Z}$, so gilt auch $\Gamma \cong \Delta$.

Aus diesem Theorem folgt nun, dass falls $\Pi_\Gamma \mathbb{Z}$ und $\Pi_\Delta \mathbb{Z}$ isomorph sind, sind auch die Graphen Γ und Δ isomorph. Das heisst nun, dass $\Pi_\Gamma \mathbb{Z}$ und $\Pi_\Delta \mathbb{Z}$ genau dieselbe Gruppenpräsentation haben. Folglich sind die Geodätischen Wachstumsreihen der beiden Gruppen gleich.

4.2 Formel für sphärisches Wachstum

In (2) gibt Juan M. Alonso an, unter welcher Bedingung die Formel:

$$\frac{1}{\mathcal{S}(G_1 *_A G_2, z)} = \frac{1}{\mathcal{S}(G_1, z)} + \frac{1}{\mathcal{S}(G_2, z)} - \frac{1}{\mathcal{S}(A, z)}$$

für ein amalgamiertes Produkt der Gruppen G_1 und G_2 richtig ist. Er hat herausgefunden, dass die Gleichung gilt, falls α_i injektiv sind und die Längen $|\alpha_1(a)|_{G_1} = |\alpha_2(a)|_{G_2} = |a|$ gleich sind für alle $a \in A$. Falls dies gilt, nennt man α_1 und α_2 *zulässige Inklusionen*.

Damit kann man eine Formel für die sphärische Wachstumsreihe von Graph Produkten finden.

Sei also Γ ein Graph mit n Knoten und $\mathfrak{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ die Knoten-Gruppen. Sei Δ ein voller Untergraph von Γ , das heisst, falls x_1 und x_2 Knoten von Δ sind, gibt es in Δ eine Kante zwischen x_1 und x_2 genau dann, wenn es auch eine Kante in Γ gibt.

Also ist $\Delta = \Gamma \cap K_m$, wobei K_m ein vollständiger Graph mit $m = |V(\Delta)|$ Knoten ist.

Sei also $\mathfrak{G}' = \{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$ und sei

$$\mathcal{P}_\Delta(z) := \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_{i_1}, z)} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_{i_m}, z)} - 1 \right).$$

Falls Δ der leere Graph ist, ist $\mathfrak{G}' = \emptyset$, dann gilt $\mathcal{P}_\Delta := 1$.

Wenn man nun weiss, dass für einen vollen Untergraph Δ von Γ die Inklusion $\Pi_\Delta \mathfrak{G}' \rightarrow \Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ zulässig ist, folgt diese

Proposition 4.7 (Siehe (6) Seite 269, Proposition 1)

Die sphärische Wachstumsreihe eines Graph Produkts kann folgendermassen berechnet werden:

$$\frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z)} = \sum_{\Delta} \mathcal{P}_\Delta(z),$$

wobei man über die vollständigen Untergraphen Δ von Γ summiert.

Beweis. Der Beweis folgt per Induktion über die Anzahl Knoten im Graph Γ :

Für $n = 0$ ist die Aussage trivial.

Wir nehmen an, die Aussage gilt für alle Graphen mit weniger als n Knoten. Sei also Γ ein Graph mit n Knoten. Dann kann man das Graph Produkt $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ zerlegen in das amalgamierte Produkt

$$\Pi_\Gamma \mathfrak{G} = (G_1 \oplus \Pi_E \mathfrak{G}') *_E \Pi_Z \mathfrak{G}'',$$

wobei x_1 der Knoten von Γ ist, zu dem die Gruppe G_1 assoziiert ist. E ist der Graph, der von den Knoten adjazent zu x_1 erzeugt wird. Z ist der vollständige Untergraph von

Γ mit den Knoten $V(\Gamma) - \{x_1\}$. Sei nun $H := G_1 \oplus \Pi_E \mathfrak{G}'$. Dann sind die Inklusionen $\Pi_E \mathfrak{G}' \rightarrow G_1 \oplus \Pi_E \mathfrak{G}'$ und $\Pi_E \mathfrak{G}' \rightarrow \Pi_Z \mathfrak{G}''$ zulässig. Also ist

$$\frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z)} = \frac{1}{\mathcal{S}(H, z)} + \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_Z \mathfrak{G}'', z)} - \frac{1}{\mathcal{S}(G_1, z)}.$$

Da aber $\mathcal{S}(H, z) = \mathcal{S}(G_1, z) \cdot \mathcal{S}(\Pi_E \mathfrak{G}', z)$, ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z)} &= \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_E \mathfrak{G}', z)} \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_1, Z)} - 1 \right) + \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_Z \mathfrak{G}'', z)} \\ &= \sum_{\Delta'} \mathcal{P}_{\Delta'}(t) \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_1, Z)} - 1 \right) + \sum_{\Delta''} \mathcal{P}_{\Delta''}(t) \\ &= \sum_{\Delta} \mathcal{P}_{\Delta}(t). \end{aligned}$$

Wobei Δ' die vollständigen Untergraphen von E und Δ'' die vollständigen Untergraphen von Z sind. Also ist die erste Summe über die vollständigen Untergraphen von Γ , die den Knoten x_1 enthalten und die zweite Summe über die vollständigen Untergraphen, die x_1 nicht enthalten. Also summiert man über alle vollständigen Untergraphen von Γ . \square

Mit Hilfe von diesem Theorem kann man nun sehr einfach die sphärische Wachstumsreihe von Bäumen ausrechnen.

Korollar 4.8

Sei Γ ein zusammenhängender Baum und $\mathfrak{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ die Menge der Knoten-Gruppen mit $G_i \cong \mathbb{Z}_3$. Dann ist das sphärische Wachstum von $\Pi_\Gamma \mathfrak{G}$ gegeben durch:

$$\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z) = \frac{(1 + 2z)^2}{1 - 2(n - 2)z}.$$

Beweis. Die vollständigen Untergraphen von einem Baum Γ sind der leere Graph, die Knoten von dem Baum und die vollständigen Untergraphen mit zwei Knoten.

Seien x_1, \dots, x_n die Knoten von Γ und $\mathfrak{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ die dazugehörigen Gruppen. Dann gilt

$$\frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z)} = 1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_i, z)} - 1 \right) + \sum_{(i,j) \in I} \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_i, z)} - 1 \right) \left(\frac{1}{\mathcal{S}(G_j, z)} - 1 \right),$$

wobei $I = \{(i, j) \mid i < j \text{ und } \{x_i, x_j\} \in E(\Gamma)\}$. In einem zusammenhängenden Graph mit n Knoten gibt es genau $n - 1$ Kanten. Dies kann man mit Hilfe der vollständigen Induktion sehen. Falls nun $G_i \cong \mathbb{Z}_3$ für alle $i = 1, \dots, n$, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z)} &= 1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + 2z} - 1 \right) + \sum_{(i,j) \in I} \left(\frac{1}{1 + 2z} - 1 \right)^2 \\ &= 1 + n \cdot \frac{-2z}{1 + z} + (n - 1) \frac{(-2z)^2}{(1 + z)^2} \\ &= \frac{1 - 2(n - 2)z}{(1 + 2z)^2}. \end{aligned}$$

Also ist das sphärische Wachstum von Bäumen mit n Knoten

$$\mathcal{S}(\Pi_\Gamma \mathfrak{G}, z) = \frac{(1 + 2z)^2}{1 - 2(n - 2)z}.$$

□

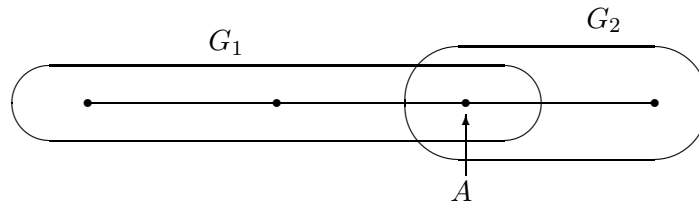
Beispiel 4.9

Sei G_1 das Graph Produkt mit Γ_1 ein vollständiger Graph mit zwei Knoten und $G_{1_1} = \langle a \mid \rangle$, $G_{1_2} = \langle b \mid \rangle$, das heisst $G_1 = \Pi_{\Gamma_1} \{G_{1_1}, G_{1_2}\} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$. Und sei G_2 das Graph Produkt mit Γ_2 ein Baum ohne Geäst mit drei Knoten, $G_{2_1} = \langle c \mid \rangle$, $G_{2_2} = \langle d \mid \rangle$ und $G_{2_3} = \langle e \mid \rangle$, dann ist $G_2 = \Pi_{\Gamma_2} \{G_{2_1}, G_{2_2}, G_{2_3}\} = \langle c, d, e \mid cd = dc, de = ed \rangle$. Sei $A = \langle f \mid \rangle$.

Sei nun $\alpha_1 : A \rightarrow G$ definiert durch $\alpha_1(f) = b$ und $\alpha_2 : A \rightarrow G$ definiert durch $\alpha_2(f) = c$. Dann ist

$$\begin{aligned} G_1 *_A G_2 &= \langle a, b, c, d, e \mid ab = ba, cd = dc, de = ed, b = c \rangle \\ &= \langle a, b, d, e \mid ab = ba, bd = db, de = ed \rangle. \end{aligned}$$

Dies entspricht der RAAG des folgenden Graphs Ξ ,

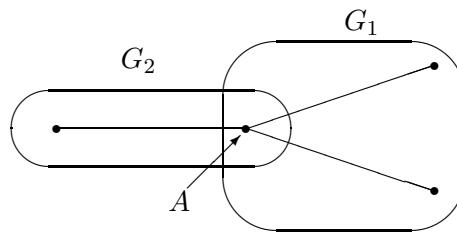


wobei die Knoten-Gruppen isomorph zu \mathbb{Z} sind.

Wenn man nun die Abbildungen anders definiert, und zwar durch $\beta_1(f) = b$ und $\beta_2(f) = d$. Dann ist die Gruppe

$$\begin{aligned} G_1 *_A G_2 &= \langle a, b, c, d, e \mid ab = ba, cd = dc, de = ed, b = d \rangle \\ &= \langle a, b, d, e \mid ab = ba, cb = bc, be = eb \rangle. \end{aligned}$$

Dies entspricht der RAAG des folgenden Graphs Δ ,



Bemerkung 4.10

Da die Inklusionen α_1 , α_2 und β_1 , β_2 zulässig sind, ist nach der Formel von Alonso für

amalgamierte Produkte das sphärische Wachstum von $\Pi_{\Xi}\mathbb{Z}$ und $\Pi_{\Delta}\mathbb{Z}$ gleich.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_{\Xi}\mathbb{Z}, z)} &= \frac{1}{\mathcal{S}(\Pi_{\Delta}\mathbb{Z}, z)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}(G_1, z)} + \frac{1}{\mathcal{S}(G_2, z)} - \frac{1}{\mathcal{S}(A, z)} \\ &= \frac{(1-z)^2}{(1+z)^2} + \frac{(z-1)(3z-1)}{(1+z)^2} - \frac{1-z}{1+z} \\ &= \frac{1-6z+5z^2}{(1+z)^2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{S}(\Pi_{\Xi}\mathbb{Z}, z) = \mathcal{S}(\Pi_{\Delta}\mathbb{Z}, z) = \frac{(1+z)^2}{(z-1)(5z-1)}.$$

Allerdings ist das geodätische Wachstum von den Gruppen $\Pi_{\Xi}\mathbb{Z}$ und $\Pi_{\Delta}\mathbb{Z}$ verschieden. Also gilt die Formel von Alonso für sphärisches, nicht aber für geodätisches Wachstum.

Die Formel darf man aber für das Graph Produkt im Beispiel 2.20 nicht verwenden, da die Homomorphismen α_i nicht Inklusionen sind.

4.3 Formel für geodätisches Wachstum

In diesem Abschnitt geht es darum, eine Formel für das geodätische Wachstum des freien und des direkten Produkts von zwei Gruppen anzugeben.

Proposition 4.11 (Siehe (11) Seite 8, Proposition 1)

Sei G eine Gruppe mit Erzeugendensystem $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ und H eine Gruppe mit Erzeugendensystem $T = \{y_1, \dots, y_m\}$. Dann wird das direkte Produkt $G \oplus H$ erzeugt von $\{(x_i, 1), (1, y_j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ und das freie Produkt $G * H$ von $S \cup T$. Sei $\mathcal{G}(G, z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$ und $\mathcal{G}(H, z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$.

(i) Das geodätische Wachstum von $G \oplus H$ mit dem obigen Erzeugendensystem ist

$$\mathcal{G}(A \oplus B, z) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n z^n,$$

$$\text{wobei } c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

(ii) Das geodätische Wachstum von $G * A$ mit dem obigen Erzeugendensystem ist

$$\frac{1}{\mathcal{G}(G * H, z)} = \frac{1}{\mathcal{G}(G, z)} + \frac{1}{\mathcal{G}(H, z)} - 1.$$

Beweis. (i) Eine Geodäte von $G \oplus H$ (in der Normalform) ist die Konkatenation von einer Geodäte (in Normalform) von G und einer Geodäte (in der Normalform) von H . Also ist eine Geodäte der Länge n von der Form $w =_{G \oplus H} vw$ mit $\ell(v) = k$ und

$\ell(w) = n - k$. Die Anzahl dieser Wörter ist $a_k \cdot b_{n-k}$. Da jeder Buchstabe in v mit jedem Buchstaben in w kommutiert, ist jede Permutation der Buchstaben von v und w , wobei die Reihenfolge der Buchstaben von v und w erhalten bleibt, auch eine Geodäte für dieses Element. Die Anzahl dieser Permutationen ist $\binom{n}{k}$. Also ist die Anzahl Geodäten der Länge n in $G \oplus H$:

$$c_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

- (ii) Ein Wort in $S \cup T$ hat die Form $v_0 w_0 v_1 w_1 \dots v_k w_k$ wobei die Buchstaben $v_0, \dots, v_k \in S^*$ und $w_0, \dots, w_k \in T^*$. $v_1, \dots, v_{k-1}, w_0, \dots, w_k$ dürfen nicht die leeren Wörter sein. $v_0 w_0 v_1 w_1 \dots v_k w_k$ ist eine Geodäte, falls alle v_i, w_i Geodäten sind für G , bzw. H . Definiere nun

$$\mathcal{G}(A * B, z)_k := \mathcal{G}(G, z)[(\mathcal{G}(H, z) - 1)(\mathcal{G}(G, z) - 1)]^k \mathcal{G}(H, z).$$

Dies ist das geodätische Wachstum für ein fixes k . Um das gesamte geodätische Wachstum auszurechnen, reicht es, über alle $k \in \mathbb{N}$ zu summieren.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(A * B, z) &= \sum_{k \geq 0} \mathcal{G}(G, z)[(\mathcal{G}(H, z) - 1)(\mathcal{G}(G, z) - 1)]^k \mathcal{G}(H, z) \\ &= \mathcal{G}(G, z) \mathcal{G}(H, z) \sum_{k \geq 0} [(\mathcal{G}(H, z) - 1)(\mathcal{G}(G, z) - 1)]^k \\ &= \frac{\mathcal{G}(G, z) \mathcal{G}(H, z)}{1 - (\mathcal{G}(H, z) - 1)(\mathcal{G}(G, z) - 1)}. \end{aligned}$$

□

4.4 Index von Untergruppen

In diesem Abschnitt wird an wichtige Definitionen und Resultate der Gruppentheorie erinnert, die uns helfen, das Wachstum von Gruppen besser zu verstehen.

Lemma 4.12

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G mit endlichem Index, $H \leq G$ und K eine Untergruppe von G , die H enthält, $H \leq K \leq G$. Dann gilt: $[G : H] < \infty$ und

$$[G : K][K : H] = [G : H].$$

Beweis. Da der Index $[G : H]$ endlich ist, gibt es nur endlich viele Nebenklassen. Definiere also $H^G = \{g_1, \dots, g_n\}$ als Menge der Repräsentanten der Linksnebenklassen von H in G . Sei $\phi : H^G \rightarrow \{gK \mid g \in G\}$ die Abbildung mit $\phi(g_i) = g_i K$.

Sei gK eine Linksnebenklasse von K . Da $H \leq K$, ist $gH \subset gK$. Sei g_i der Repräsentant der Linksnebenklasse gH . Dann ist $\phi(g_i) = gK$. Also ist ϕ surjektiv.

Ausserdem gilt:

$$\begin{aligned}
 |\phi^{-1}(g_0K)| &= |\{g \in H^G \mid gK = g_0K\}| \\
 &= |\{g \in H^G \mid gH \subset g_0K\}| \\
 &= |\{kH \mid k \in K\}| \\
 &= [K : H].
 \end{aligned}$$

Also ist $\frac{[G:H]}{[K:H]} = [G : K]$. □

Lemma 4.13

Sei G eine Gruppe und K und H Untergruppen mit endlichem Index. Dann gilt:

$$[G : H \cap K] \leq [G : H] \cdot [G : K].$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $[K : H \cap K] \leq [G : H]$, da falls dies gilt ist $[G : H \cap K] = [G : K][K : H \cap K] \leq [G : K][G : H]$, nach dem Lemma 4.12. Da HK eine Untergruppe von G ist und $H \leq HK$, gilt $[HK : H] \leq [G : H]$.

Behauptung: Es gilt $[K : H \cap K] = [HK : H]$. Um dies zu zeigen, untersuchen wir die Abbildung $\varphi : \{kH \cap K \mid k \in K\} \rightarrow \{kH \mid k \in KH\}$, $k(H \cap K) \mapsto kH$. φ ist wohldefiniert, da $H \cap K \leq H$. φ ist injektiv, da falls $\varphi(k_1(H \cap K)) = \varphi(k_2(H \cap K))$ gilt $k_1H = k_2H$, das heisst $k_1^{-1}k_2 \in H$. k_1 und k_2 sind Elemente aus K , also ist $k_1^{-1}k_2 \in H \cap K$. Damit ist auch $k_1(H \cap K) = k_2(H \cap K)$. Also ist φ injektiv. φ ist surjektiv: Sei gH eine Linksnebenklasse von H in KH . Dann ist $g \in KH$. Also hat g die Form $g = kh$, für $k \in K$, $h \in H$. Also ist $\phi(k(H \cap K)) = kH = khH$. □

Proposition 4.14

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann gibt es eine Untergruppe N von H so dass N ein Normalteiler von G ist und N in G einen endlichen Index $[G : N]$ hat.

Beweis. Sei $N(H)$ der Normalisator von H , das heisst $N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\}$. Damit ist $N(H)$ die grösste Untergruppe von G , so dass H Normalteiler ist. Denn wenn man annimmt, dass es eine Untergruppe K von G gibt, die grösser ist als $N(H)$ und $H \triangleleft K$, gibt es ein $k \in K \setminus N(H)$ mit $khk^{-1} \in H$ für alle $h \in H$. Dies widerspricht aber der Definition vom Normalisator.

Da $[G : H] < \infty$ und $H \leq N(H)$, ist auch der Index von $N(H)$ in G nach dem Lemma 4.12 endlich.

Also gibt es nur endlich viele Konjugate von H . Das liegt daran, dass $N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Also ist $|\{gHg^{-1} \mid g \in G\}| = [G : N(H)]$.

Seien also H_1, \dots, H_n die Konjugate von H , das heisst $H_i = g_iHg_i^{-1}$. Da

$$[G : H_i] = [G : N(H)]$$

hat jedes Konjugat endlichen Index. Also ist auch der Index $[G : H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n] < \infty$ aufgrund des Lemmas 4.13. Und $N := H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$ ist ein Normalteiler von H , da

$$H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n = \{h \in H \mid g_i h g_i^{-1} \in H \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Also hat H eine Untergruppe, die normal und von endlichem Index in G ist. \square

Definition 4.15

Eine Gruppe hat eine Eigenschaft *virtuell*, falls es eine Untergruppe von endlichem Index mit dieser Eigenschaft gibt.

Natürlich haben die Gruppen, die eine Eigenschaft haben, auch virtuell diese Eigenschaft. Ausserdem haben endliche Gruppen alle virtuellen Eigenschaften, da der Index der trivialen Untergruppe $\{e\}$ auch endlich ist und $\{e\}$ alle Eigenschaften hat, die eine Gruppe haben kann.

Beispiel 4.16

Das direkte Produkt einer zyklischen und einer endlichen Gruppe ist virtuell zyklisch:

- $G_1 := \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$ ist virtuell zyklisch, da die Untergruppe $H_1 := \{([0], n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ einen endlichen Index $[G_1 : H_1] = 3$ hat.
- $G_2 := \langle a, b, c, d \mid a^7 = 1, ab = ba, ac = ca, ad = da \rangle$ ist virtuell frei, da die Untergruppe $H_2 := \langle b, c, d \rangle \cong \mathbb{F}_3$ und $[G_2 : H_2] = 7$.

4.5 Spezielle Gruppen und deren geodätisches Wachstum

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Wachstum von Familien von Gruppen. Wir werden sehen, dass einige Familien polynomielles, einige exponentielles geodätisches Wachstum haben. Teilweise auch abhängig von ihrer Präsentation.

Bemerkung 4.17

Die geodätische Wachstumsreihe hängt stark von der Wahl der Präsentation ab.

Beispiel 4.18 (Siehe (5) Seite 3, Example 3)

Sei $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = 1, ab = ba \rangle$, das heisst $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Dann hat jede Geodäte der Länge n die Form $b^i a^{\pm 1} b^{n-i-1}$, $b^{-i} a^{\pm 1} b^{i-n+1}$ oder $b^{\pm n}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Also sind die Koeffizienten der geodätischen Wachstumsreihe $b_n = 4n + 2$.

Sei nun $G_2 = \langle c, d \mid c^2 = d^2, cd = dc \rangle$, auch hier ist $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ (dies kann man sehen, wenn man $c = ab$ und $b = d$ setzt). Dann ist jede Geodäte der Länge n eine Folge von Buchstaben aus $\{b, c\}$, $\{b, c^{-1}\}$, $\{b^{-1}, c\}$ oder $\{b^{-1}, c^{-1}\}$. Das heisst $b_n = 4 \cdot 2^n$, für $n \geq 1$.

Obwohl beide Präsentationen von $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ nur zwei Erzeuger und zwei Relationen haben, hat dieselbe Gruppe je nach Präsentation polynomielles Wachstum oder exponentielles geodätisches Wachstum.

4.5.1 Virtuell zyklische Gruppen

Proposition 4.19 (Siehe (5) Seite 4, Proposition 8)

Jede virtuell zyklische Gruppe hat ein endliches Erzeugendensystem mit polynomiell geodätischem Wachstum.

Beweis. Sei also G eine virtuell zyklische Gruppe. Dann hat G eine Untergruppe H , die zyklisch ist und von endlichem Index. Wenn H endlich ist, ist auch G endlich und dann ist das Wachstum natürlich polynomiell. Falls nicht, ist H isomorph zu \mathbb{Z} . Also ist $H \cong \mathbb{Z}$. Mit der Proposition 4.14 gibt es eine Untergruppe N von \mathbb{Z} , so dass N ein Normalteiler von endlichem Index in G ist. Allerdings sind alle nichtleeren Untergruppen von \mathbb{Z} isomorph zu \mathbb{Z} . Das heisst, G hat einen Normalteiler N , der isomorph zu \mathbb{Z} ist.

Da diese Untergruppe zyklisch ist, kann sie mit nur einem Element $t \in G$ erzeugt werden. Also ist der Normalteiler $N = \langle t \rangle \leq G$.

Seien $q_1, \dots, q_m \in G$ die Repräsentanten der Rechtsnebenklassen von $\langle t \rangle$. Da $\langle t \rangle$ ein Normalteiler ist, ist $G/\langle t \rangle = Q$ eine Gruppe, also die Faktorgruppe.

Da $\langle t \rangle$ ein Normalteiler von G ist, ist $q_i t q_i^{-1} \in \langle t \rangle$. Also ist $\varphi_i : \langle t \rangle \rightarrow \langle t \rangle$ mit $\varphi_i(t) = q_i t q_i^{-1}$ ein Homomorphismus. φ_i ist injektiv, denn falls $\varphi_i(t^a) = \varphi_i(t^b)$ ist $q_i t^a q_i^{-1} = q_i t^b q_i^{-1}$ also $a = b$. Da $q_i^{-1} t q_i = t^s$ für ein $s \in \mathbb{Z}$ ist $t = \varphi_i(t^s)$. Also ist φ_i auch surjektiv und damit ein Automorphismus von $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$. Aber die Automorphismen von \mathbb{Z} haben die Form $1 \mapsto \pm 1$. Also ist $\varphi(t) = t^{\pm 1}$. Die Wörter der Länge drei mit Buchstaben in $\{q_1, \dots, q_m\}$ haben die Form

$$q_i^{\pm 1} q_j^{\pm 1} q_k^{\pm 1} =_G t^x q_c,$$

wobei $x \in \mathbb{Z}$ und $1 \leq c \leq m$. Da die Liste der Länge-3 Wörter endlich ist, kann man M definieren als das grösste $|x|$, das mit dieser Umformung auftaucht.

Sei $S := \{q_1^{\pm 1}, \dots, q_m^{\pm 1}, t^{\pm 1}, \dots, t^{\pm M}\}$ ein neues symmetrisches Erzeugendensystem für G . Sei w eine Geodäte bezüglich S . Da $q_i t q_i^{-1} = t^{\pm 1}$, stellt $t^k q_{i_1} \cdots q_{i_p}$ dasselbe Element dar wie w . Falls $p \geq 3$ ist $q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3} = t^x q_c$ mit $|x| \leq M$, also lässt sich w kürzer schreiben. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass w eine Geodäte ist. Das heisst w lässt sich auch durch $t^k q_{i_1} q_{i_2}$ darstellen. Also hat w die Form $u_1 q_{i_1} u_2 q_{i_2} u_3$, wobei u_1, u_2 und u_3 aus Buchstaben $t^{\pm j}$ bestehen. Wobei u_i natürlich Geodäten sind.

Sei also $u \in \langle t^{\pm 1}, \dots, t^{\pm M} \rangle$ geodätisch. u besteht nur aus Buchstaben t^{-i} oder t^i , denn sonst gibt es ein Unterwort der Form $t^{-i} t^j$ oder $t^j t^{-i}$, dies ist aber dasselbe wie t^{j-i} , $j - i \leq M$, was kürzer ist.

Das Wort u bestehe aus Buchstaben der Form t^i . Sei t^i ein Buchstabe in u mit $i < M$. Dann kommt t^i weniger als M Mal vor, denn sonst ist $(t^i)^M = (t^M)^i$, was kürzer ist. Das heisst, keine Geodäte hat mehr als $N := 3(M - 1) \cdot (M - 1) + 2$ Buchstaben, die nicht $t^{\pm M}$ sind. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für genügend grosse $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl Geodäten der Länge n kleiner ist als $k \binom{n}{N}$. Also ist das Wachstum polynomiell. \square

4.5.2 Gruppen mit frei abelschen aber nicht zyklischen Untergruppe

Proposition 4.20 (Siehe (5), Seite 6 Proposition 10)

Jede endlich erzeugte Gruppe, die sich surjektiv durch einen Homomorphismus auf \mathbb{Z}^2 abbilden lässt, hat exponentielles geodätisches Wachstum.

Es reicht, zu beweisen, dass die freie abelsche Gruppe mit zwei Erzeugern, also \mathbb{Z}^2 exponentielles geodätisches Wachstum für jedes endliche Erzeugendensystem hat.

Beweis. Sei $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ein Erzeugendensystem für \mathbb{Z}^2 . Wenn man \mathbb{Z}^2 als Teilmenge von \mathbb{R}^2 auffasst entsprechen die Erzeuger a_i Vektoren in \mathbb{R}^2 also $a_i = (a_{i1}, a_{i2})$. Sei P das konvexe Polygon erzeugt von $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ und a_i und a_j zwei Vektoren auf P , so dass die Strecke $[a_i, a_j]$ eine Kante des Polygons ist. Dann sind die Punkte auf den Kanten des Polygons kP Geodäten der Länge k . Dann ist $a_i^n a_j^n$ eine Geodäte, da $a_i^n a_j^n$ in der Mitte der Kante $[a_i^{2n}, a_j^{2n}]$ liegt. Nun kann $a_i^n a_j^n$ auf mindestens $\binom{2n}{n}$ Arten dargestellt werden. Nach Stirling ist $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, also ist das Wachstum exponentiell. \square

4.5.3 Nilpotente Gruppen

Notation: Sei G eine Gruppe. Dann ist $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_2(G) = [G, G]$ und $\gamma_i(G) := [\gamma_{i-1}(G), G]$.

Definition 4.21

Eine Gruppe G heisst *nilpotent vom Grad c* , falls $\gamma_{c+1}(G) = \{1\}$. Eine Gruppe heisst *nilpotent*, falls es ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\gamma_{c+1}(G) = \{1\}$.

Falls eine Gruppe nilpotent vom Grad 1 ist, ist die Gruppe abelsch, denn es gilt $[g, h] = 1$ und damit $gh = hg$ für alle $g, h \in G$.

Proposition 4.22 (Siehe (5) Seite 7, Proposition 14)

Eine endlich erzeugte, virtuell nilpotente Gruppe ist entweder virtuell zyklisch oder hat ein homomorphes Bild, das virtuell frei abelsch ist mit einem Grad von mindestens 2.

Beweis. Sei G eine endlich erzeugte, virtuell nilpotente Gruppe. Also gibt es eine nilpotente Untergruppe H , die endlich erzeugt ist und $[G : H] < \infty$. Nach der Proposition 4.14 hat H eine Untergruppe, die normal und von endlichem Index in G ist. Da jede Untergruppe einer nilpotenten Gruppe nilpotent ist, kann man H ersetzen durch einen nilpotenten Normalteiler, der von endlichem Index ist. Von den Untergruppen mit diesen Eigenschaften wähle jene, die den kleinsten Nilpotenzgrad c hat.

Falls $c = 1$ ist, ist der Kommutator $[H, H] = \{1\}$, also ist H abelsch und damit G virtuell abelsch. Folglich ist G entweder virtuell zyklisch oder virtuell frei abelsch vom Grad ≥ 2 .

Falls $c > 1$, ist $\gamma_1(H) = H$, $\gamma_2(H) = [H, H]$, $\gamma_3(H) = [\gamma_2(H), H]$, \dots , $\gamma_{c+1} = [\gamma_c(H), H] = \{1\}$. $\gamma_1(H)$, $\gamma_2(H)$ und $\gamma_3(H)$ sind Normalteiler von G .

Falls die Abelisierung von H , $H/\gamma_2(H) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T$ vom Rang $r \geq 2$ ist, gilt

$$\infty > |G/H| = |(G/\gamma_2(H))/(H/\gamma_2(H))|.$$

Für $G' := G/\gamma_2(H)$ ist

$$|G/H| = |G'/\mathbb{Z}^r \oplus T| = |(G'/\mathbb{Z}^r)/(\mathbb{Z}^r \oplus T/\mathbb{Z}^r)| < \infty.$$

Da die Torsionsgruppe T endlich ist, ist auch $G'/\mathbb{Z}^r < \infty$. Also hat $G/\gamma_2(H)$ eine freie abelsche Untergruppe vom Rang mindestens 2 mit einem endlichen Index. Dann sind wir fertig.

Falls die Abelisierung von $H/\gamma_2(H)$ virtuell zyklisch ist, erhalten wir einen Widerspruch: Sei K eine Untergruppe von H mit endlichem Index, so dass $K/\gamma_2(H)$ zyklisch ist und $a\gamma_2(H)$ der Erzeuger der Faktorgruppe $K/\gamma_2(H)$. Seien $x, y \in \gamma_2(H)$ und $m, n \in \mathbb{Z}$, dann sind $a^n x \gamma_3(H)$ und $a^m y \gamma_3(H)$ zwei beliebige Elemente in $K/N(\gamma_3)$. Also gilt

$$a^n x \gamma_3(H) a^m y \gamma_3(H) = a^m y \gamma_3(H) a^n x \gamma_3(H).$$

Damit ist $K/\gamma_3(H)$ abelsch. Da $\gamma_3(H)$ vom Nilpotenzgrad $c - 2$ ist, hat K einen Nilpotenzgrad von höchstens $c - 1$. Dies widerspricht der Wahl von H . \square

Proposition 4.23

Eine endlich erzeugte, virtuell nilpotente Gruppe ist entweder virtuell zyklisch oder lässt sich surjektiv durch einen Homomorphismus auf \mathbb{Z}^2 abbilden.

Beweis. Sei G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, die nicht virtuell zyklisch ist. Dann hat sie ein homomorphes Bild H , das virtuell frei abelsch mit endlichem Rang ≥ 2 ist. Da G nilpotent ist, ist auch H nilpotent. Sei T die Torsionsuntergruppe von H , also ist H/T eine freie abelsche Gruppe, vom Rang ≥ 2 . \square

Bemerkung 4.24

Da virtuell zyklische Gruppen polynomielles geodätisches Wachstum haben, und Gruppen, die sich homomorph auf \mathbb{Z}^2 abbilden lassen exponentielles geodätisches Wachstum haben, haben nilpotente Gruppen genau dann polynomielles geodätisches Wachstum, wenn sie virtuell zyklisch sind, und genau dann exponentielles Wachstum, wenn sie sich homomorph auf \mathbb{Z}^2 abbilden lassen.

Literaturverzeichnis

- [1] <http://de.wikipedia.org/wiki/termersetzungssystem>, Wikipedia, die Freie Enzyklopädie, 2011.
- [2] Juan M. Alonso, *Growth functions of amalgams*, Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 19, Springer, New York, 1991, pp. 1–34. MR 1105328 (93a:20037)
- [3] Juan M. Alonso and Martin R. Bridson, *Semihyperbolic groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **70** (1995), no. 1, 56–114. MR 1300841 (95j:20033)
- [4] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1744486 (2000k:53038)
- [5] Elder M. Bridson M., Burillo J. and Sunić Z., *Groups with polynomial geodesic growth*, arXiv:1009.5051v1 (2010).
- [6] Ian M. Chiswell, *The growth series of a graph product*, Bull. London Math. Soc. **26** (1994), no. 3, 268–272. MR 1289045 (95f:20050)
- [7] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, and William P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992. MR 1161694 (93i:20036)
- [8] Rostislav Grigorchuk and Tatiana Nagnibeda, *Complete growth functions of hyperbolic groups*, Invent. Math. **130** (1997), no. 1, 159–188. MR 1471889 (98i:20038)
- [9] Susan Hermiller and John Meier, *Algorithms and geometry for graph products of groups*, J. Algebra **171** (1995), no. 1, 230–257. MR 1314099 (96a:20052)
- [10] Michael R. Laurence, *A generating set for the automorphism group of a graph group*, J. London Math. Soc. (2) **52** (1995), no. 2, 318–334. MR 1356145 (96k:20068)
- [11] Joseph Loeffler, John Meier, and James Worthington, *Graph products and Cannon pairs*, Internat. J. Algebra Comput. **12** (2002), no. 6, 747–754. MR 1949695 (2003k:20059)
- [12] John Meier, *Groups, graphs and trees*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, An introduction to the geometry of infinite groups. MR 2498449 (2010e:20066)

-
- [13] M. H. A. Newman, *On theories with a combinatorial definition of "equivalence."*, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 223–243. MR 0007372 (4,126c)

Danksagung

Als erstes vielen Dank an Frau Dr. Laura Ciobanu für ihre interessanten Themen, ihre Hilfe und ihre Geduld. Man kann sich keine engagiertere Betreuerin vorstellen.

Auch bedanken möchte ich mich beim Team Lonza für das angenehme Arbeitsklima, die guten Gespräche und die tröstenden Worte, wenn sich mal eine Schlange in die Lonza verirrt. Besonders danken möchte ich Thomas für den LaTeX-Support und Mike für das Lesen meiner Arbeit.

Als nächstes bedanke ich mich herzlich bei meiner Familie: Mama, Sebastian, Sabine, Marc und Jérôme. Sie haben mich in diesem gesundheitlich nicht ganz einfachen Jahr unterstützt, wo sie konnten.